DEVOIR MM1 — MIASH GROUPE 1
À rendre sur moodle
vendredi 11 décembre 2020, avant 20 h

EXERCICE 1. **(1)** En utilisant les théorèmes sur les sommes, produits et quotients de limites, estimez les limites

a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1}$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n+1}$$

Réponse — Ces deux limites sont des formes indéterminées, car les deux suites sont exprimées comme des quotients de suites qui tendent chacune vers $+\infty$. Pour la limite **a)**, on peut écrire, pour $n > 0$,

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

On utilise alors $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, qui entraîne par les règles sur le produit de suites, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Par les règles sur les quotients de suites, cela entraîne $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1$. On en déduit par quotient de limites que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Pour **b)**, on procède de même en écrivant

$$\frac{n^2+n}{n+1} == \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n+1} = +\infty$$

(2) Démontrez ensuite vos conclusions précédentes en utilisant la définition de la limite.

Réponse — Pour **a)**, on commence par estimer la différence entre les valeurs prises par la suite et la limite

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1 = \frac{n^2+n}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1} = \frac{n-1}{n^2+1}$$

et chercher une majoration *a priori* de cette différence

$$\left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| = \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Ainsi $\left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| \leq \frac{1}{n}$ et il reste à trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une condition *suffisante* sur n pour que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Pour cela il suffit bien entendu de choisir $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Concluons : $\forall \varepsilon > 0$, nous choisissons $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

où l'on a utilisé les inégalités $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et $\left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| \leq \frac{1}{n}$.
Pour **b)**, nous cherchons une minoration *a priori* de $\frac{n^2+n}{n+1}$:

$$\frac{n^2+n}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1}$$

Pour $n \geq 1$, on a $n+1 \leq 2n$ et donc $\frac{n^2+n}{n+1} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$. Ainsi il nous reste à trouver, pour tout $A > 0$, une condition *suffisante* sur n pour que $\frac{n}{2} > A$. Il suffit pour cela de prendre $n > 2A$. Concluons : $\forall A > 0$, nous choisissons $n_0 \geq \max(1, 2A)$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow n \geq \max(1, 2A) \Longrightarrow \begin{cases} n \geq 1 \Longrightarrow \frac{n^2+n}{n+1} \geq \frac{n}{2} \\ n \geq 2A \Longleftrightarrow \frac{n}{2} \geq A \end{cases} \Longrightarrow \frac{n^2+n}{n+1} \geq A.$$

<u>EXERCICE 2.</u> En utilisant les théorèmes sur les sommes, produits et quotients de limites, estimer les limites suivantes :
a) (on discutera en fonction des paramètres a et b)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + an + b} - n$$

Réponse — Remarquons d'abord que, pour que la suite soit bien définie, il faut et il suffit que $n^2 + an + n \geq 0$, ce qui est toujours vrai pour $n \geq n_1$, où n_1 est une valeur qui dépend de a et b[1]. Pour évaluer cette suite, nous multiplions et divisons le terme général de la suite par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}u_n = \sqrt{n^2+an+b}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+an+b}-n)(\sqrt{n^2+an+b}+n)}{\sqrt{n^2+an+b}+n}\\ &= \frac{n^2+an+b-n^2}{\sqrt{n^2+an+b}+n} = \frac{an+b}{\sqrt{n^2+an+b}+n}\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite diviser par n au dénominateur et au numérateur :

$$u_n = \frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1}$$

En utilisant les règles sur les sommes, produits et quotients de suites (et aussi sur la racine carrée), on obtient que le dénominateur tend $1+1=2$ et le numérateur tend vers a. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an+b}-n = \frac{a}{2}$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)$$

Réponse — Cette forme est indéterminée car $n \to +\infty$ et $\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1 \to 0$. On doit donc affiner l'expression du terme général de la suite, en utilisant à nouveau la quantité conjuguée :

$$v_n = n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right) = n\frac{\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1\right)}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1} = n\frac{\frac{n+1}{n-1}-1}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1}$$

Et comme $\frac{n+1}{n-1}-1 = \frac{n+1}{n-1}-\frac{n-1}{n-1} = \frac{2}{n-1}$,

$$v_n = n\frac{\frac{2}{n-1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1} = \frac{2n}{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1} = \frac{2}{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}}+1}$$

On peut alors en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right) = \frac{2}{1}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1}}+1} = 1$$

[1] Cela est toujours vrai si $a^2-4b \leq 0$ et il suffit de supposer que $n \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-4b}-a\right)$, si $a^2-4b>0$.

EXERCICE 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les proposition suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier votre réponse)

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ;
   Réponse — **Oui**, car, si une suite converge vers une limite ℓ, alors toute suite extraite de cette suite converge également vers ℓ.

2. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente;
   Réponse — **Non**, si, par exemple, $u_n = (-1)^n$, alors cette suite ne converge pas, mais les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

3. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   Réponse — **Oui**, en effet, les hypothèses se traduisent par :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists p_1 \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq p_1 \Longrightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$$

et

$$\forall\varepsilon > 0, \exists p_2 \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq p_2 \Longrightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$$

Donc, $\forall\varepsilon > 0$, si on choisit $n_0 := \max(2p_1 + 1, 2p_2)$, on, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1, \text{alors } p \geq p_1 \Longrightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon \\ \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p, \text{alors } p \geq p_2 \Longrightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon \end{cases}$$

et, dans les deux cas, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

EXERCICE 4. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

converge. Calculer sa limite.
Réponse — On montre d'abord l'identité $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, valable pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Il suffit pour cela de calculer $(1 - a)u_n$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} (1-a)u_n & = & (1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \\ & = & (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) - a(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \\ & = & 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ & & \quad -a - a^2 - \cdots - a^n - a^{n+1} \\ & = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - a^{n+1} \end{array}$$

et donc, si $a \neq 1$, on peut diviser par $1-a$ de chaque côté et on obtient l'identité. L'hypothèse $0 < a < 1$ entraîne que $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}$$

<u>EXERCICE 5.</u> On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer préliminairement que

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Réponse — On utilise la formule du binôme :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

On observe que le terme pour $k = 0$ donne $\frac{1}{0!}\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^0} = 1$ et que, pour $k \geq 1$,

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

et donc, toujours pour $k \geq 1$,

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

On en déduit la formule.

2. Montrer que $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
Réponse — On déduit de la formule précédente que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

car $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \geq 0$ car c'est un produit de termes positifs. De plus $n+1 > n$ entraîne $\frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n}$ et donc les inégalités $1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n+1} > 1-\frac{2}{n}, \cdots, 1-\frac{k-1}{n+1} > 1-\frac{k-1}{n}$, lesquelles impliquent

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

pour tout k entre 1 et n. Donc $u_{n+1}-u_n > 0$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

3. En utilisant l'inégalité $2^{k-1} \leq k!$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, plus précisément[2] que $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Reponse — Comme $u_1 = 2$ et comme on a montré que la suite est croissante, on $2 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (on a même une inégalité stricte si $n \geq 2$, car la suite est en fait *strictement* croissante, comme montré à la question 2).

   Pour la majoration de u_n, on utilise à nouveau la formule démontrée à la question 1. Chaque coefficient $1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ est plus petit que 1, car c'est un produit de facteurs positifs et inférieurs ou égaux à 1. Donc

$$u_n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

   où l'on a utilisé l'inégalité $2^{k-1} \leq k!$ On utilise alors le résultat de l'exercice 4 qui précède, selon lequel la suite de terme général $v_n := \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^n$ converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, car $0 < \frac{1}{2} < 1$. De plus la suite (v_n) est croissante car $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ et est donc majorée par sa limite, c'est à dire 2. L'inégalité précédente se traduit en $u_n \leq 1+v_{n-1}$, qui entraîne $u_n < 1+2 = 3$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Reponse — On a montré que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc, d'après un théorème du cours, elle converge.

[2]L'énoncé initial demandait de montrer l'inégalité $2 < u_n < 3$, celle-ci n'est vraie que pour $n \geq 2$.