CORRIGÉ DU DEVOIR MM1 — MIASH GROUPE 1
du mardi 10 novembre 2020, 20 h

Remarque : dans la présentation de la méthode du pivot de Gauss, L_1, L_2 et L_3 désignent systématiquement les lignes obtenues juste à l'étape précédente.

<u>EXERCICE 1.</u> Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+6z &=& -2\\ 6x+3y-2z &=& 17\\ -x+6y+3z &=& -1 \end{array}\right.$$

Réponse — On utilise la méthode du pivot de Gauss. Dans un premier temps, il s'agit d'échelonner le système:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -2\\ 6 & 3 & -2 & 17\\ -1 & 6 & 3 & -1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{array}{r} \mathsf{L}_1\\ \mathsf{L}_2-2\mathsf{L}_1\\ \mathsf{L}_1+3\mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 7 & -14 & 21\\ 0 & 16 & 15 & -5 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{r} \mathsf{L}_1\\ \frac{1}{7}\mathsf{L}_2\\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 16 & 15 & -5 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{array}{r} \mathsf{L}_1\\ \mathsf{L}_2\\ \mathsf{L}_3-16\mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 47 & -53 \end{array}\right)$$

A ce stade on observe trois pivots du côté gauche, ce qui montre déjà que le système admet une unique solution. Dans un deuxième temps, on rend le système diagonal:

$$\begin{array}{r} 47\mathsf{L}_1-6\mathsf{L}_3\\ 47\mathsf{L}_2+2\mathsf{L}_3\\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 141 & -94 & 0 & 224\\ 0 & 47 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 47 & -53 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{array}{r} \mathsf{L}_1+2\mathsf{L}_2\\ \mathsf{L}_2\\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 141 & 0 & 0 & 294\\ 0 & 47 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 47 & -53 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{3}\mathsf{L}_1\\ \mathsf{L}_2\\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 47 & 0 & 0 & 98\\ 0 & 47 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 47 & -53 \end{array}\right)$$

Donc la solution est :

$$\left(\frac{98}{47}, \frac{35}{47}, -\frac{53}{47}\right)$$

<u>EXERCICE 2.</u> Résoudre le système d'équations linéaires suivant dans lequel α est un paramètre réel. On discutera en fonction de la valeur de α.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 3\\ 5x+3y+2z &=& 2\\ 3x+2y+3z &=& \alpha \end{array}\right.$$

Réponse — On utilise à nouveau la méthode du pivot de Gauss. On commence par échelonner:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & \alpha \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ 2\mathsf{L}_2 - 5\mathsf{L}_1 \\ 2\mathsf{L}_3 - 3\mathsf{L}_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 9 & 2\alpha - 9 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_3 - \mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha + 2 \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_2 \\ \frac{1}{2}\mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \end{array}\right)$$

On observe que le système est *compatible* si et seulement si $\alpha + 1 = 0$. Donc, si $\alpha \neq -1$, ce système n'admet pas de solution.

Supposons donc que $\alpha = -1$, alors ce système admet au moins une solution. Comme on a obtenu a deux pivots, ce système comporte deux inconnues principales (x et y) et une inconnue secondaire (z). On obtient donc:

$$\begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 - \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -10 & 14 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \end{array}\right)$$

On peut donc librement imposer à z d'être égal à un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 10z & = & 14 \\ y + 9z & = & -11 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 7 & + & 5\lambda \\ y & = & -11 & - & 9\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

<u>EXERCICE 3.</u> Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels α, β, γ pour que le système suivant admette des solutions

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & \alpha \\ x - y + 2z & = & \beta \\ 8x + 2y + 6z & = & \gamma \end{array}\right.$$

Déterminer l'ensemble des solutions dans le cas où celui-ci est non vide et préciser alors ce qu'est géométriquement cet ensemble.

Réponse — Encore une utilisation de la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 & \beta \\ 8 & 2 & 6 & \gamma \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & 1 & \alpha \\ 8 & 2 & 6 & \gamma \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_2 - 3\mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_3 - 8\mathsf{L}_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \beta \\ 0 & 5 & -5 & \alpha - 3\beta \\ 0 & 10 & -10 & \gamma - 8\beta \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_3 - 2\mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \beta \\ 0 & 5 & -5 & \alpha - 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 2\alpha - 2\beta \end{array}\right)$$

On voit donc que le système est compatible ssi $2\alpha + 2\beta - \gamma = 0$. Dans le cas où cette condition est vérifiée, on a alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \beta \\ 0 & 5 & -5 & \alpha - 3\beta \end{array}\right) \iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 \\ \frac{1}{5}\mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \beta \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha - 3\beta)/5 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{array}{r} \mathsf{L}_1 + \mathsf{L}_2 \\ \mathsf{L}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & (\alpha + 2\beta)/5 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha - 3\beta)/5 \end{array}\right)$$

Donc on peut fixer librement la valeur de z, égale à un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \lambda & = & \frac{\alpha+2\beta}{5} \\ y - \lambda & = & \frac{\alpha-3\beta}{5} \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccc} x & = & \frac{\alpha+2\beta}{5} & - & \lambda \\ y & = & \frac{\alpha-3\beta}{5} & + & \lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite affine passant par le point $\left(\frac{\alpha+2\beta}{5}, \frac{\alpha-3\beta}{5}, 0\right)$ et de vecteur directeur $(-1, 1, 1)$.