Raisonnement mathématiques

Relations binaires

Exemples a) $x \leq y$ dans $\mathbb{R}$: relation d'ordre

b) Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, "x a même parité y" $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$, $x - y = 2p$

(relation d'équivalence)

c) $E =$ { groupes de personnes }

$A, B \in E$, "A aime B" (ce n'est pour cela que "B aime A")

c') même ensemble E : "A a le même prénom que B"
(relation d'équivalence)

Définition Relation binaire dans un ensemble E = un sous-ensemble $\boxed{\mathcal{B} \subset E \times E}$

$E = \{(x, y),\ x \in E, y \in E\}$

On associe à $\mathcal{B}$ la relation $\mathcal{R}$:

$\forall (x, y) \in E \times E$, $\boxed{x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{B}}$

Exemples a) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \leq$

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$

$\Leftrightarrow (x, y) \in \{(x, x+z) \mid x \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$.

Donc $\mathcal{B} = \{(x, x+z) \mid x \in \mathbb{R}, z \geq 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) $E = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$: "a même parité que"

$x, y \in \mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y$ est un multiple de 2

$\mathcal{B} = \{(x, x + 2z) \mid x, z \in \mathbb{Z}\}$.

Définition Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E.

a) $\mathcal{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\boxed{x \mathcal{R} x}$

b) $\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow [\forall x, y \in E,\ \boxed{x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x}]$

$(\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x]$

b') $\mathcal{R}$ est antisymétrique $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in E$,

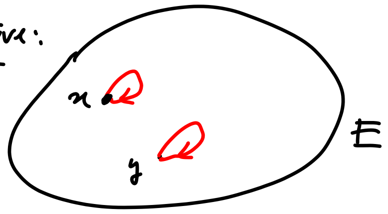
$$\boxed{x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y}$$

c) $\mathcal{R}$ est transitive $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y, z \in E$,

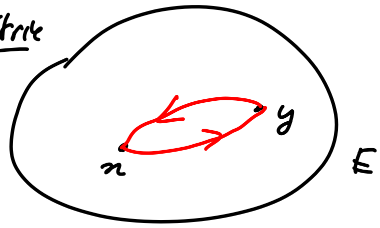
$$\boxed{x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z}$$

d) $\mathcal{R}$ est totale si, pour toute paire d'éléments (x,y), on a (x R y ou y R x). Une relation binaire est partielle si elle n'est pas totale.

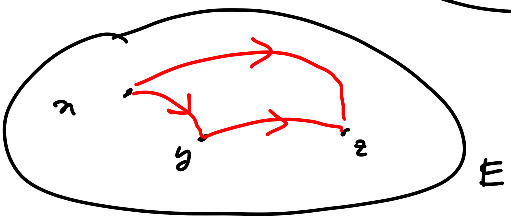
Réflexive :



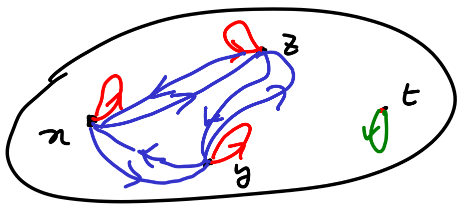
Symétrie



Transitivité



Définition : Relation d'équivalence = relation binaire réflexive, symétrique et transitive



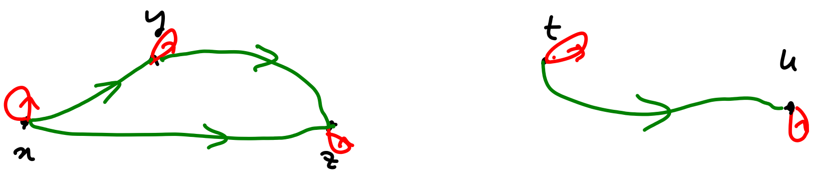
Sens : permet de découper E en une union disjointe de sous-ensemble

Exemple E = groupe de personnes, "A a le même prénom que B".

→ relation d'équivalence.

→ répartir les personnes par prénom.

Définition Une relation d'ordre est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive



"Que des routes à sens unique"

Exemples : $\mathcal{R}$ définie par : $\left[\forall x, y \in E \;\; x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y\right]$: relation d'équivalence, d'ordre

$B = \{(x,x) \mid x \in E\} \subset E \times E$ ("sous-ensemble diagonal")

Exemple $E = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x \leq y$ — Relation d'ordre

réflexif : $x \leq x$

antisymétrique : $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

transitif : $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Définition Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale ssi $\forall x, y \in E$, $x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$ ("ou" inclusif) — On peut toujours comparer deux éléments.

Exemple $E = \mathbb{R}$, $\boxed{x \mathcal{R} y \iff x < y}$ — non réflexif, antisymétrique, transitif

Définition Une relation d'ordre qui n'est pas totale est partielle.

Exercices On note parfois $\underbrace{"\sim" = "\mathcal{R}"}_{\text{plutôt une relation d'équivalence}}$ ou $\underbrace{"\mathcal{R}" = "\to"}_{\text{relation d'ordre}}$

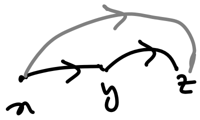
Ex 1 Dans $\mathbb{Z}$ $x \sim y \iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ y - x = 3k}$

C'est une relation d'équivalence :

(i) réflexive : $x \sim x$ car $x - x = 0 = 3 \cdot 0$

(ii) symétrique : $y - x = 3k \iff x - y = -3k$

(iii) transitif : $\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} & y - x = 3k \\ \exists \ell \in \mathbb{Z} & z - y = 3\ell \end{cases}$



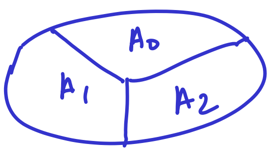
$z - x = 3(k + \ell) \iff x \sim z$

Remarque $x \sim y \iff x \equiv y\ [3]$ "x est congru à y modulo 3".

Découpage associé à toute classe d'équivalence

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} \text{soit } x \equiv 0\ [3] \iff x \sim y,\ \forall y \in \{3p \mid p \in \mathbb{Z}\} = A_0 \\ \text{soit } x \equiv 1\ [3] \iff x \sim y,\ \forall y \in \{3p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\} = A_1 \\ \text{soit } x \equiv 2\ [3] \iff x \sim y,\ \forall y \in \{3p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} = A_2 \end{cases}$

$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ et $A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_0 = \emptyset$



$\mathbb{Z}$

"partition" de $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2$

Ex 1 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ relation binaire dans E.

Hypothèses : $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive : $\forall x, y \in E$

Que penser de ce raisonnement ?

« $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (sym.)

or $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$ (trans.)

donc $\mathcal{R}$ est réflexive »

$\boxed{\forall x, y, z \in E,\ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z}$

Ex 2 Dire si les relations binaires proposées sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives, totales, partielles ?

a) $E = \mathbb{N}$ et $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$

$0 \mathcal{R} 0$ et $\forall x \in \mathbb{N},\ x \neq 0 \Rightarrow \neg (x \mathcal{R} x)$ ← non réflexive

$\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{N},\ \neg (x \mathcal{R} y)$

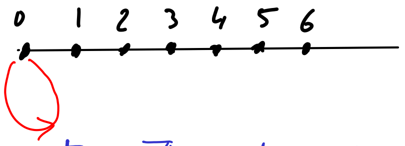
$\mathcal{B} = \{(0,0)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

symétrique $0 \mathcal{R} 0 \Rightarrow 0 \mathcal{R} 0$

transitive

antisymétrique non totale

$x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$



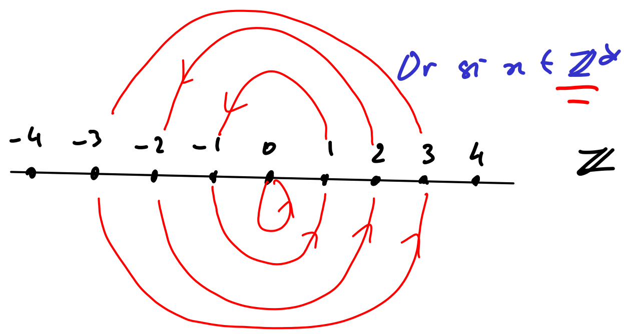
$E = \mathbb{Z}$ et $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$

- $0 \mathcal{R} 0$, $1 \mathcal{R} -1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $n \mathcal{R} -n$ ← non réflexive $(1 \cancel{\mathcal{R}} 1)$
- symétrique : si $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$.
- pas antisymétrique : par l'absurde : supposons que cette relation est antisymétrique. Alors $(1 \mathcal{R} -1 \wedge -1 \mathcal{R} 1) \Rightarrow 1 = -1$ Contradiction
- transitive ? Non : si $\boxed{x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z}$

$\Leftrightarrow x = -y$ et $y = -z \Rightarrow x = -y = -(-z) = z$

c'est $\boxed{x = z}$

Or si $x \in \mathbb{Z}^*$, on n'a pas $[x \mathcal{R} z] \Leftrightarrow [x = -z]$



Essayer de terminer cet exercice (Ex. 2)

Exercice 5

$E = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$\forall a, b \in E$, "$a \mathcal{R} b$" $\iff$ "a divise b" $\iff \exists q \in \mathbb{N},\ b = aq$

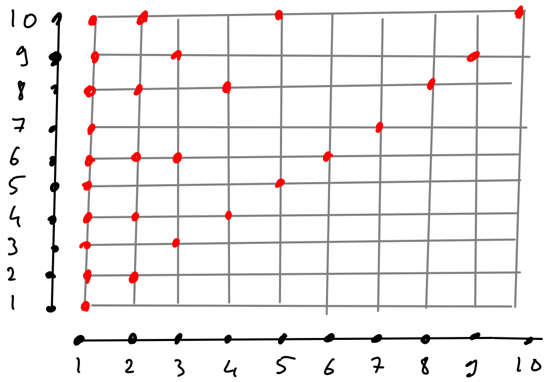
Relation binaire
- réflexive $\forall a \in E,\quad a = a \cdot 1$
- non symétrique : 2 divise 4 mais 4 ne divise pas 2
- antisymétrique : $\forall a, b \in E,\quad a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$

  Remarque $\left.\begin{array}{l} a \mathcal{R} b \Rightarrow a \leq b \\ b \mathcal{R} a \Rightarrow b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$
- transitive : $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

En effet $\left\{\begin{array}{l} a \mathcal{R} b \iff \exists q \in \mathbb{N},\ b = aq \\ b \mathcal{R} c \iff \exists p \in \mathbb{N},\ c = bp \end{array}\right. \Rightarrow c = bp = a(qp) \Rightarrow a \mathcal{R} c$

Conclusion : relation d'ordre

Graphe ? $\mathcal{B} = \{(a, b) \in E \times E \mid a \mathcal{R} b$ ou "a divise b" $\}$.



$\mathcal{B} \subset E \times E$

Pas un ordre total

pas de relation entre 2 et 3

Plus grand élément ? non.
Majorant ? oui, par exemple 10 !
Borne supérieure ? oui : 1820.

En tant que sous-ensemble de $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$

Un dernier exemple

$E = \{$ suites complexes $(u_n)_n$ qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang $\}$.

Relation d'équivalence

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ existe et vaut 1.

Exemple : $u_n = n$ et $v_n = n + 2$