CORRIGÉ DU DEVOIR RM1 — MIASH GROUPE 1 du mardi 17 novembre 2020, 20 h (feuille TD n. 2)

EXERCICE 5. Injection/surjection
Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Réponse — L'hypothèse que $g \circ f$ est injective s'écrit :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

on en déduit :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

et donc que f est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Réponse — $\forall z \in G$, l'hypothèse que $g \circ f$ est surjective entraîne que $\exists x \in E$, $g[f(x)] = z$, donc si on note $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = g(f(x)) = z$, ce qui prouve que g est surjective.

EXERCICE 8. Récurrence
Soit $n \geq 1$ un entier, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Réponse — Nous procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété qui dit que l'identité précédente est valable pour n.

• **Initialisation** : nous montrons $P(1)$:

$$\sum_{k=0}^{1} k^2 = 0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$$

donc $P(1)$ est vrai.

• **Hérédité** : nous supposons que $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(n)$ est vrai et nous cherchons à montrer que $P(n+1)$ est vrai. Pour cela nous calculons le membre de gauche dans l'identité à montrer, en utilisant $P(n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = (n+1)\frac{2n^2 + n + 6(n+1)}{6}\end{aligned}$$

Or $2n^2+n+6(n+1)=2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

ce qui prouve $P(n+1)$.

EXERCICE 9. Récurrence.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

Réponse — On a

$$u_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1(1+1) + 2(2+1) = 2+6 = 8$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) = 2+6+12 = 20.$$

2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Réponse — Nous procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété qui dit que l'identité précédente est valable pour n.

• **Initialisation** : Il suffit de vérifier $P(1)$ et, comme nous avons déjà calculé u_1, il suffit de calculer le terme de droite dans l'identité :

$$\frac{1}{3}1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3}2\cdot 3 = 2$$

valeur qui coïncide bien avec u_1.

• **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai. Calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)((n+1)+1) = u_n + (n+1)(n+2),$$

en utilisant $P(n)$, on a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{3}n+1\right] \\ &= (n+1)(n+2)\frac{n+3}{3} = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

ce qui prouve $P(n+1)$.