Petite erreur sur les notes écrites lundi 25 à propos de la définition de la borne supérieure :

Défi Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que ℓ est une **borne supérieure** de A si

(i) ℓ est un $\boxed{\text{majorant}}$ de A : $\boxed{\forall x \in A, \quad x \leq \ell}$

(ii) ℓ est le plus petit des majorants de A :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \text{ si } M \text{ majore } A, \text{ alors } \ell \leq M.}$$

But : comprendre la notion de limite.

Rappel : Définition de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle.

Def Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Sens ? les valeurs prises par u_n sont "piégées" dans un intervalle de points à une distance de ℓ inférieure à ε, pourvu que n soit assez grand.

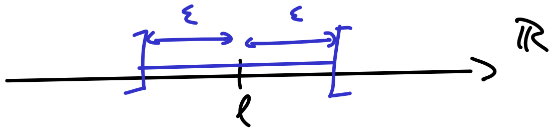
Remarque $|u_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$

$\iff \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

$\iff \boxed{u_n \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[}$

Définition Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $r \in [0, +\infty[$. La boule ouverte de centre ℓ et de rayon r est l'intervalle ouvert

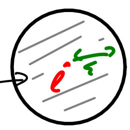
$$B_{\mathbb{R}}(\ell, \varepsilon) = \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[$$



Pourquoi Boule ? dans le plan complexe $\mathbb{C}$

$$B_{\mathbb{C}}(\ell, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} \; ; \; |z - \ell| < \varepsilon \}$$

boule de dimension 2 ou le disque



Remarque Si $\varepsilon = 0$, $B_{\mathbb{R}}(\ell, 0) = \left]\ell, \ell\right[= \emptyset$

Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$

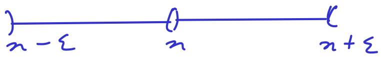
Définition Soit $x \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$ (un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).
V est un voisinage de x si $\exists\ \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$

Corollaire $x \in \underbrace{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\text{épaisseur } 2\varepsilon} \subset V \Rightarrow x \in V$

Exemple $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de x si $\varepsilon > 0$

Variante **Définition** Voisinage épointé d'un point $x \in \mathbb{R}$: ensemble de la forme $V \setminus \{x\}$ où V est un voisinage de x

Exemple : $\underbrace{]x-\varepsilon, x[}_{\text{intervalle ouvert}} \cup \underbrace{]x, x+\varepsilon[}_{\text{intervalle ouvert}} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus \{x\}$



Rappels Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

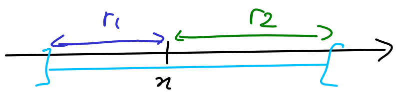
Def
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$ intervalle ouvert
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$ intervalle fermé à gauche, ouvert à droite
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$

Variantes **Définition**
Voisinage de $+\infty$: ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel que $\exists\ M \in \mathbb{R}$, $[M, +\infty[\subset V$
Voisinage de $-\infty$: $V \subset \mathbb{R}$ tel que $\exists\ m \in \mathbb{R}$, $]-\infty, m] \subset V$

Exemples de voisinages d'un point $x \in \mathbb{R}$.

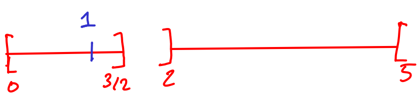
a) $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$.

b) $]x-r_1, x+r_2[$ où $r_1, r_2 > 0$



c) $x = 1$, $V =]0, 3/2[\cup]2, 5[$

d) $x = 1$, $V = [0, 3/2] \cup]2, 5[$



$\varepsilon = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[=]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \subset V$

$x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \implies \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \iff x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

intervalle ouvert — intervalle fermé

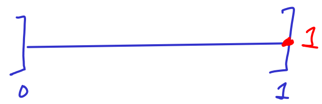
(V est un voisinage de 1 $\iff \exists \varepsilon > 0, \;]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$) : marche $\varepsilon = \frac{1}{2}$

e) $x = 1$, $V = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\left]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Proposition Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V, V' \subset \mathbb{R}$.
Si $V \subset V'$ et V est un voisinage de x alors V' est un voisinage de x

Exemple $x = 1$ et $A =]0, 1]$ $\quad x \in A$



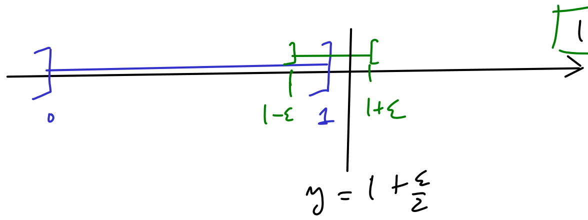
Mais $]0,1]$ n'est pas un voisinage de 1

Non $\big[ ]0,1]$ voisinage de 1 $\big] \iff$ Non $\big[\exists \varepsilon > 0, \;]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset A\big]$

"contraire"

$\iff \big[\forall \varepsilon > 0, \;]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset A\big]$

$\iff \big[\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \; \exists y \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[, \; y \notin A}_{\text{Vrai : je prends } y = 1+\frac{\varepsilon}{2}}\big]$



$\boxed{1-\varepsilon < \underbrace{1+\frac{\varepsilon}{2}}_{= y} < 1+\varepsilon} \iff$ (car $\varepsilon > 0$) $y \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$

mais $\boxed{1 < \underbrace{1+\frac{\varepsilon}{2}}_{= y}} \iff y \notin A$

Définition || Un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}$ est un <u>ouvert</u> si U est un voisinage de chacun de ses points.

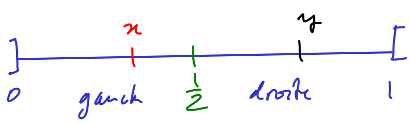
$\iff \forall x \in U$, U est un voisinage de x

$\iff \forall x \in U, \; \exists \varepsilon > 0, \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$ (a priori ε dépend de x)

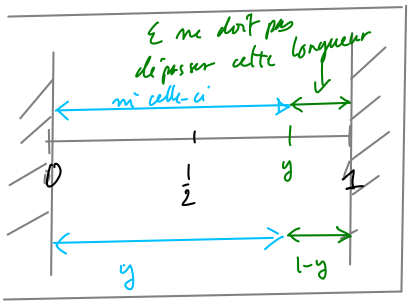
Exemple $U =]0,1[$ (intervalle ouvert).

Pas de problème en 0 et en 1 car $0 \notin U$ et $1 \notin U$

$\forall x \in]0,1[$,



Deux cas



$0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\varepsilon = x > 0$

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]x-x, x+x[=]0, 2x[$

$x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow]0,2x[\subset]0,1[$

$\frac{1}{2} \leq y < 1$, $\varepsilon = 1-y > 0$

$]y-\varepsilon, y+\varepsilon[=]y-1+y, y+1-y[=]2y-1, 1[\subset]0,1[$

$\frac{1}{2} \leq y \Leftrightarrow 1 \leq 2y \Leftrightarrow 0 \leq 2y-1$

$\boxed{\text{Proposition: Tout intervalle ouvert }]a,b[\text{ est un ouvert.}}$

Exemple $]0,1]$: on a vu que : $1 \in]0,1]$ mais $]0,1]$ n'est pas un voisinage de 1

$\Rightarrow$ donc $]0,1]$ n'est pas un ouvert.

Exemple $U =]a,b[\cup]c,d[$: est un ouvert. $a < b < c < d$

Car c'est un voisinage de chacun de ses points :

Preuve Soit $x \in U$.
- soit $x \in]a,b[$, $]a,b[$ est un ouvert, donc un voisinage de chacun de ses points, en particulier de $x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[\subset U$
- soit $x \in]c,d[$; $]c,d[$ est un ouvert

même raisonnement $\exists \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$

Théorème Toute union finie ou infinie d'ouverts est un ouvert.

Preuve Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts

Soit $\left[x \in \bigcup_{i \in I} U_i\right] \Leftrightarrow \left[\exists j \in I, x \in U_j\right]$

Donc $\exists j \in I$, $x \in U_j$. Mais U_j est un ouvert, donc c'est un voisinage de chacun de ses points, en particulier x

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $\boxed{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[} \subset U_j \subset \boxed{\bigcup_{i \in I} U_i}$

Qu'en est-il de l'intersection ?

Théorème Soit $(U_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Alors $\bigcap_{k=1,\dots,n} U_k$ est ouvert

$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$.

<u>Démonstration</u> Soit $\left[x \in \bigcap_{1 \le k \le n} U_k\right] \iff \left[\forall k \in \{1,\dots,n\}, \ x \in U_k\right]$

Chaque U_k est un voisinage de x $\Rightarrow \exists \, \varepsilon_k > 0, \ ]x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k[\subset U_k$

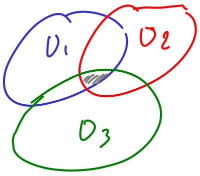
Soit $\boxed{\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0}$ marche car $\{1,\dots,n\}$ est fini

Alors $\left[\boxed{\forall k,} \ \varepsilon \le \varepsilon_k \Rightarrow \boxed{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[} \subset \,]x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k[\ \boxed{\subset U_k}\right]$

$\iff \boxed{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \subset \bigcap_{1 \le k \le n} U_k}$

- MIASH 1 : Médéric Motte
- MIASH 2: Jordan Nicoules
- MIASH 3 : Hao Wu
- MIASH 4 : Mario Goncalves Lamas

$O_1, O_2, O_3,$



- $O_1 \cup O_2 \cup O_3 = O_1 \cup (O_2 \cup O_3)$
$\qquad = (O_1 \cup O_2) \cup O_3$
$\qquad = \bigcup_{k = \{1,2,3\}} O_k$

- $O_1 \cap O_2 \cap O_3 = \bigcap_{k \in \{1,2,3\}} O_k.$