Informations (voir moodle)

1) Aujourd'hui : cours uniquement à distance, 8h30 – 10h.
2) Problème pour être présent à 10h45 à l'Université
   → possibilité de se déconnecter avant la fin du cours et de regarder la fin en replay (lien sur moodle)
3) A partir de la semaine prochaine : cours 8h15 – 9h45
4) Les TD ont lieu en salle

MIASH 1 : mardi 13 h 30 - 16 h 00, Halle 478F + jeudi 8 h 30 - 10 h 30, Halle 478F

MIASH 2 : mardi 16 h - 18 h 30, Halle 479 E + mercredi 13 h 30 - 15 h 30, Halle 479 F

MIASH 3 : lundi 10 h 45 - 12 h 45, Halle 410 B + vendredi 10 h 45 - 13 h 15, Halle 410 B

MIAS 4 : mardi 13 h 15 - 13 h 45 Halle 10 E + vendredi 8 h 30 - 10 h30, Halle 2 A

Rappels

Voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$: $V \subset \mathbb{R}$ tel que
$$\exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$$

Ouvert de $\mathbb{R}$: partie O de $\mathbb{R}$ qui est un voisinage de chacun de ses points
$$\iff \forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$$

Exemples
- $]a,b[$ (intervalle ouvert) $= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x < b\}$ est un ouvert.
- $\mathbb{R}$ est un ouvert, $\emptyset$ est un ouvert

Théorème

union finie ou infinie d'ouverts

1) Si $(O_i)_{i \in I}$ est famille d'ouverts, $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert

intersection finie d'ouverts

2) Si $(O_n)_{n \in \{1,\dots,N\}}$ est famille d'ouverts $\bigcap_{1 \leq n \leq N} O_n$ est un ouvert

Conséquence $]a,b[\cup]c,d[$ est un ouvert.

Exemple Une intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert
$$O_n =]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Chaque O_n est un ouvert.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = ? = \{0\}$$

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \{0\} \iff \left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \subset \{0\}\right]$ et $\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \supset \{0\}\right]$

(i) $\boxed{\supset}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \{0\} \subset O_n$

$\iff \{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$

(ii) $\boxed{\subset}$ raisonnons par l'absurde, supposons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \not\subset \{0\}$

cela signifie $\exists x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ et $x \neq 0$

supposons $x > 0$: alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \frac{1}{n} < x \implies x \notin]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

$\implies \boxed{x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n}$

si $x < 0$: même raisonnement. $\implies \ldots \implies \boxed{x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n}$

Contradiction

Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \subset \{0\}$

b) $\{0\}$ n'est pas un ouvert : $0 \in \{0\}$

Car : $[\exists \varepsilon > 0, \ \underbrace{]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[}_{]-\varepsilon, \varepsilon[} \subset \{0\}]$ est faux

Lien avec les limites Déf. 1 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff \begin{cases} u_n - \ell < \varepsilon \\ -u_n + \ell < \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} u_n - \ell < \varepsilon \\ -\varepsilon < u_n - \ell \end{cases} \iff \begin{cases} u_n < \varepsilon + \ell \\ \ell - \varepsilon < u_n \end{cases}$

$\iff \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

Déf. 2 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff$

$\forall V$: voisinage de ℓ, $\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq N \implies u_n \in V$

Déf 3 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall O$: ouvert contenant ℓ, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq N \implies u_n \in O$.

Théorème les 3 définitions sont équivalentes.

Preuve a) Déf 1 $\implies$ Déf 2

Supposons Déf 1 est satisfaite. Montrons Déf 2 est satisfaite.

Soit V un voisinage de ℓ : $\exists \varepsilon > 0, \quad]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset V$

J'applique <u>Déf 1</u> : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$

$\iff u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

$\implies u_n \in V$

(Déf 2).

b) <u>Déf 2</u> $\implies$ <u>Déf 1</u>

Je suppose <u>Déf 2</u> satisfaite. Je montre Déf 1.

Soit $\varepsilon > 0$, je prends $V =]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$: c'est un voisinage de ℓ !

J'applique <u>Déf 2</u> : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, u_n \in V =]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

$\iff |u_n - \ell| < \varepsilon$

<u>Notion de fermés</u>

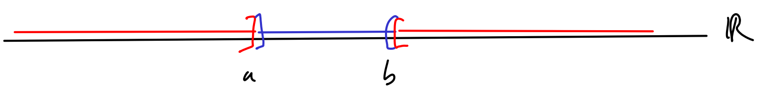
<u>Déf</u> Soit $F \subset \mathbb{R}$. F est un sous-ensemble <u>fermé</u> (on dira "un <u>fermé</u>") si $\mathbb{R} \setminus F$ est un <u>ouvert</u>.

<u>Exemples de fermés</u> 0) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts

$\iff \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ et $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ sont des <u>fermés</u>.

(les seules parties de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$)

1) $\mathbb{R} \setminus \underbrace{]a, b[}_{\text{ouvert}} = \underbrace{]-\infty, a] \cup [b, +\infty[}_{\text{fermé}}$



2) $]-\infty, a[$ est un ouvert, $]b, +\infty[$ est un ouvert $\implies]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert.

$\iff \mathbb{R} \setminus (]-\infty, a[\cup]b, +\infty[)$ est un <u>fermé</u>

$\iff [a, b]$ est un <u>fermé</u>.

3) si $a = b$, $\{a\} = \mathbb{R} \setminus (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[)$ est <u>fermé</u>

<u>Théorème</u> a) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie de <u>fermés</u>.

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un <u>fermé</u>.

b) Soit $(F_n)_{1 \leq n \leq N}$ une famille $\boxed{\text{finie}}$ de fermés

Alors $\bigcup_{1 \leq n \leq N} F_n$ est un <u>fermé</u>.

Preuve a) $\forall i$, $O_i = \mathbb{R} \setminus F_i$ est un ouvert.

$\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé $\iff \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$ est ouvert.

$\iff \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R}\setminus F_i)$ ouvert   Toujours vrai

$$\boxed{\mathbb{R}\setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R}\setminus F_i)}$$

b) $\bigcup_{1\le n\le N} F_n$ est fermé $\iff \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$ ouvert

$\iff \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\setminus F_n)$ ouvert   vrai

Garder à l'esprit les exemples : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[}_{\text{ouverts}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{pas ouvert}}$

$$\bigcup_{x\in]0,1[} \underbrace{\{x\}}_{\text{fermé}} = \underbrace{]0,1[}_{\text{pas fermé.}}$$

Rappel $]0,1[= \mathbb{R} \setminus (\underbrace{]-\infty,0] \cup [1,+\infty[}_{\text{non ouvert}})$: ça n'est pas un voisinage de 0, ni de 1

Exemples • $[a,b]$ est un fermé.

• $[a,b] \cup [c,d]$ est fermé (union finie de 2 fermés)

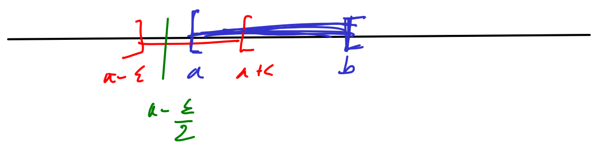
• $]-\infty, a]$ est un fermé.

D'autres exemples $[a,b[$: ça ni fermé, ni ouvert ("rien du tout")

(quand même : voisinage de chaque point dans $]a,b[$)

- Pourquoi $[a,b[$ n'est pas ouvert ? Ce n'est pas un voisinage de a.

Raisonnement par l'absurde $\underbrace{\exists \varepsilon>0, \ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset [a,b[}_{\text{FAUX}} \Rightarrow \underbrace{a-\frac{\varepsilon}{2} \in [a,b[}_{\text{faux.}}$



• Pourquoi $[a,b[$ n'est pas fermé ?. Parce que $\mathbb{R}\setminus[a,b[$ n'est pas ouvert.

$\mathbb{R}\setminus[a,b[=]-\infty, a[\cup [b,+\infty[$ contient b

$\Uparrow$

n'est pas un voisinage de b.

• $[b,+\infty[$ est fermé (et $]b,+\infty[$ est ouvert)

Fermé ∪ Ouvert ? On ne peut rien dire en général.

$[-1,1] \cup]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\; = [-1,1]$ fermé.

$]-1,1[\cup [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] = \;]-1,1[$ ouvert.

$]-1,\frac{1}{2}[\cup [-\frac{1}{2},1] = \;]-1,1]$ ni ouvert, ni fermé.

Notion d'adhérence d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$.

Déf a) Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est valeur d'adhérence de A si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset}$

$\iff \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A.}$

b) L'ensemble des valeurs d'adhérence de A est appelé l'adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

Propriété $A \subset \overline{A}$

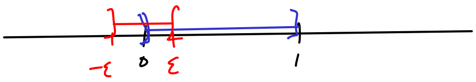
$\forall x \in A, \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ car il contient au moins x.

Exemple $A = \;]0,1]$

- D'après ce qui précède $]0,1] \subset \overline{A}$
- $0 \in \overline{A}$:

Montrer : $[\forall \varepsilon > 0, \;]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset]$

$\iff [\forall \varepsilon > 0, \;]-\varepsilon, \varepsilon[\cap]0,1] \neq \emptyset]$ Par exemple, $\frac{\varepsilon}{2} \in \;]-\varepsilon,\varepsilon[\cap]0,1]$



Donc $[0,1] \subset \overline{A}$

A suivre : on verra que $[0,1] = \overline{A}$