Un devoir sera donné :
- groupe 3 : aujourd'hui **lundi**
- groupes 1, 2, 4 : demain **mardi**

| à faire chez soi
| à rendre au bout d'une semaine.

Sujets disponibles sur moodle (voir aussi en TD).

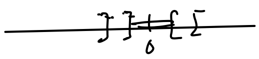
Le cours du lundi 15 février sera encore avancé 8 h - 9 h 30

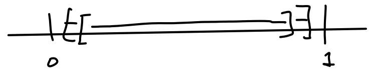
Rappel : boules ouvertes $]x_0 - r, x_0 + r[$

Voisinages, ouverts, fermés = complémentaires des ouverts.

Cas où $\cap$ et $\cup$ posent problèmes si on a un nombre infini :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[}_{\text{ouverts}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{pas ouvert}} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{fermés}} = \underbrace{]0, 1[}_{\text{pas fermé}}$$





Point d'adhérent | a est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

Adhérence : $\bar{A} = \{$points adhérents à $A\}$

Thm $\bar{A}$ = Plus petit fermé contenant A
(i) $\bar{A}$ fermé, $A \subset \bar{A}$
(ii) $\forall F$ fermé, $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$

Proposition Soit $A \subset \mathbb{R}$ $\boxed{\text{fermé.}}$
Alors $\forall (u_n)_n$, suite réelle
$$\begin{cases} \forall n, \ u_n \in A \\ u_n \text{ converge dans } \mathbb{R} \text{ vers } \ell \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ell \in A}$$

Corollaire Pour n'importe quel $A \subset \mathbb{R}$. Si
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in A \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ell \in \bar{A}}$$

Preuve la suite prend ses valeurs dans $\bar{A}$, on applique la proposition avec $\bar{A}$ fermé.

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est séquentiellement fermé si :
$$\boxed{\forall (u_n)_n, \text{ suite réelle si } u_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \text{ alors } \boxed{\ell \in A}}$$

Théorème Soit $A \subset \mathbb{R}$.
A séquentiellement fermé $\Longleftrightarrow$ A est fermé.

Démonstration A séquentiellement fermé $\Longleftarrow$ A fermé

Déjà montré : Proposition précédente

Réciproque : A séquentiellement fermé $\Longrightarrow$ A fermé.

Montrons la contraposée A non séq. fermé $\Longleftarrow$ A non fermé

Supposons A non fermé $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus A$ non ouvert

$\Leftrightarrow$ Non ($\neg$) $[\forall x \in \mathbb{R}\setminus A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus A]$

$\Leftrightarrow$ $[\exists \ell \in \mathbb{R}\setminus A,\ \forall \varepsilon > 0,\ ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\not\subset \mathbb{R}\setminus A]$

$\Leftrightarrow$ $[\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R}\setminus A},\ \forall \varepsilon > 0,\ ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, je choisis $\varepsilon = \frac{1}{n}$: $]\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists u_n \in]\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n}[\cap A$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Donc $\begin{cases} u_n \in A \\ |u_n - \ell| < \frac{1}{n},\ \forall n \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ mais $\boxed{\ell \notin A}$

Donc A n'est pas séquentiellement fermé.

Corollaire On me présente $A \subset \mathbb{R}$, on me demande de montrer que A n'est pas fermé. Il suffit que je montre que A n'est pas séquentiellement fermé : il suffit de trouver une suite convergente, à valeur dans A et dont la limite n'est pas A.

Exemple $A =]0, 1]$. $u_n = \frac{1}{n}$ $\begin{cases} u_n \in A,\ \forall n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \notin A \end{cases} \Rightarrow$ A non fermé.

Def (Intérieur) Soit $A \subset \mathbb{R}$. L'intérieur de A est un ensemble $\mathring{A}$ tel que : $\begin{cases} (i)\ \mathring{A} \subset A,\ \mathring{A} \text{ ouvert} \\ (ii)\ \forall O \text{ ouvert},\ O \subset A \Rightarrow O \subset \mathring{A} \end{cases}$

L'intérieur de A se note $\mathring{A}$

Remarque $\mathring{A} = \mathbb{R} \setminus (\overline{\mathbb{R}\setminus A})$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus A \\ & & \downarrow \\ \mathbb{R}\setminus(\overline{\mathbb{R}\setminus A}) & \longleftarrow & \overline{\mathbb{R}\setminus A} \end{array}$$

Exemples $\overset{\circ}{]a,b[} =]a,b[$

$\overset{\circ}{]a,b]} =]a,b[$ $\qquad \overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[$

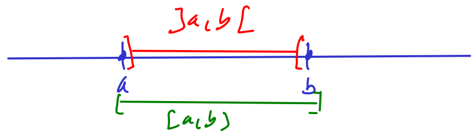
$\overset{\circ}{\{a\}} = \emptyset$, $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$\overset{\circ}{\overbrace{[1,2[\cup \{3\}}} =]1,2[$

Définition Le bord de A est $\boxed{\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}}$

Remarque : On a toujours $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$

Exemple $A =]a,b]$ $\begin{cases} \mathring{A} =]a,b[\\ \bar{A} = [a,b] \end{cases}$ $\partial A = \{a,b\}$



Voisinage généralisé

Déf | Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si $\exists M \in \mathbb{R},]M,+\infty[\subset A$
| Une — $A \subset \mathbb{R}$ — — voisinage de $-\infty$ si $\exists m \in \mathbb{R},]-\infty, m[\subset A$

Déf Voisinage dans A

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A}$. Un $\boxed{\text{voisinage de } a \text{ dans } A}$ est un ensemble que je peux écrire $V \cap A$ où V = voisinage de A

Exemples. a) $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\bar{A} = \mathbb{R}$, donc $a \in \bar{A}$

si V = voisinage de A, $V \cap A = V \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\}) = \underbrace{V \setminus \{a\}}_{\text{voisinage épointé}}$

b) $A =]a,+\infty[$, $a \in \bar{A} = [a,+\infty[$

$V \cap]a,+\infty[$: voisinage à droite épointé de a

c) $A =]-\infty, a[$, $V \cap]-\infty, a[$: voisinage à gauche épointé de a

---

Nouveau Chapitre

Étude des fonctions

Limite d'une fonction en un point

Définition 1 Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{D}$

On dit que : f admet une limite ℓ lorsque x tend vers a si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

On écrit alors $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Définition plus générale 1 si $A \subset D$, $a \in \bar{A}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Exemple $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0,\ \forall x\in D \quad \begin{cases}|x-a|<\alpha \\ x>a\end{cases} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon}$$

(limite par valeur supérieure)

Définition 2 Soit $D\subset\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{D}$

$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \Longleftrightarrow$

$$\boxed{\forall V = \text{voisinage de } \ell \text{ dans } \mathbb{R},\ \exists \alpha>0,\ \forall x\in D,\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)\in V}$$

Attention : il y avait une faute dans la première version (j'avais écrit a au lieu de l). Rectifié le 8/12 à 21 h

Equivalence entre Déf 1 et Déf 2

Déf 2 $\Rightarrow$ Déf 1

Soit $\varepsilon>0$, $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ est un voisinage de ℓ. J'applique Déf 2.

$\Rightarrow \exists\alpha>0,\ \forall x\in D,\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)\in\ ]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$

$\Longleftrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Déf 1

Déf 1 $\Rightarrow$ Déf 2 Supposons f, a, ℓ satisfont Déf 1

Soit V = voisinage de ℓ, donc $\exists\varepsilon>0$, $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\ \subset V$

J'applique Déf 1 : $\exists\alpha>0,\ \forall x\in D,\ |x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow f(x)\in\ ]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\ \subset V$

Remarque On peut réécrire Déf 2 :

$\forall V$ voisinage de ℓ, $\exists\alpha>0$, $\forall x\in D$, $\underline{x\in\ ]a-\alpha,a+\alpha[}\ \Rightarrow f(x)\in V$

Définition 3 $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si

$$\boxed{\forall V = \text{voisinage de } \ell,\ \exists U = \text{voisinage de } a \text{ tel que } x\in U \Rightarrow f(x)\in V}$$

Déf 1 $\Longleftrightarrow$ Déf 2 $\Longleftrightarrow$ Déf 3 $\Longleftrightarrow$ Déf 4

Définition 4 $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si

$$\boxed{\forall V = \text{voisinage de } \ell,\ f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a}$$

Rappel $f^{-1}(V)=\{x\in D;\ f(x)\in V\}$ (Image inverse ou antécédent)

Déf 4 $\Rightarrow$ Déf 3 Je suppose que Déf 4 est satisfaite

Je veux montrer : $\forall V$ voisinage de ℓ, $\exists U$: voisinage de a tel que $x\in U \Rightarrow f(x)\in V$.

Je prends $U = f^{-1}(V)$: c'est un voisinage de a (Def 4)
et $x \in U \iff f(x) \in V$

<u>Def 3 $\Rightarrow$ Def 4</u> Je suppose que Def 3 est satisfaite :

Donc je suppose : $\forall$ <u>V : voisinage de ℓ</u>, $\exists$ U : voisinage de a,
$x \in U \Rightarrow f(x) \in V \iff x \in f^{-1}(V)$

Donc $U \subset f^{-1}(V)$.

mais comme U est un voisinage de a, j'en déduis que <u>$f^{-1}(V)$ est un voisinage de a</u>

Donc <u>Def 4</u>

<u>Propriété utilisée</u>	$\forall$ U, W, si U est un voisinage de a et $U \subset W$	$\Rightarrow$ W est un voisinage de a

<u>Def</u> $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff$ $\boxed{\text{l'image inverse par } f \text{ de n'importe quel voisinage de } \ell \text{ est un voisinage de } a}$

Attention :
il y a avait une
faute dans la
première version
(j'avais écrit a
au lieu de l).
Rectifié le 8/12
à 21 h