Notes sur le cours RM2 : quelques rappels

Frédéric Hélein, L1 MIASH, Université de Paris

Janvier 2021

1 Propriétés de base de $\mathbb{R}$

1.1 Rappels sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (et, au delà, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

(i) dans $\mathbb{N}$, on peut ajouter et multiplier les entiers naturels :

$$(a, b) \longrightarrow a + b, \qquad (a, b) \longrightarrow a \times b = ab$$

l'entier 0 est un *élément neutre pour l'addition* et l'entier 1 est un *élément neutre pour la multiplication*, c'est à dire :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a + 0 = a, \qquad a \times 1 = a$$

mais, aucun entier naturel non nul $a \in \mathbb{N}^*$ n'admet d'*inverse pour l'addition*—ce qu'on appelle couramment un *opposé*—, c'est à dire un entier b tel que $a + b = 0$; en effet b serait *négatif*, ce qui n'existe pas **dans** $\mathbb{N}$. De même, si $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a n'admet pas d'*inverse pour la multiplication*. Ainsi par exemple, 2 n'a pas d'inverse pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ *compatible avec l'addition et la multiplication*, c'est à dire telle que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \qquad a \leq b \Longrightarrow a + c \leq a + c \quad \text{et} \quad ac \leq bc$$

(ii) dans $\mathbb{Z}$, à la différence de $\mathbb{N}$, tout entier $a \in \mathbb{Z}$ admet un unique *inverse pour l'addition* :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \ \exists! b \in \mathbb{Z}, \quad a + b = 0 \qquad \text{et on note } b = -a$$

Mais, comme dans $\mathbb{N}$, les entiers relatifs n'admettent pas d'inverse pour la multiplication en général (seuls deux entiers relatifs admettent un inverse : lesquels ?).

La relation d'ordre $\leq$ s'étend sur $\mathbb{Z}$, elle est compatible avec l'addition :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \qquad a \leq b \Longrightarrow a + c \leq a + c$$

et avec la multiplication, mais **à condition de faire attention** aux signes :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{cases} a \leq b & \text{et} \quad 0 \leq c \implies ac \leq bc \\ a \leq b & \text{et} \quad c \leq 0 \implies bc \leq ac \end{cases}$$

(iii) dans $\mathbb{Q}$, on a les mêmes propriétés que dans $\mathbb{Z}$, avec, en plus : tout rationnel $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ admet un *inverse pour la multiplication*, on le note $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

(iv) si on n'a pas les bonnes lunettes, $\mathbb{R}$ ressemble en tout point avec $\mathbb{Q}$ et il n'est pas complètement évident de visualiser une différence entre la droite des rationnels et la droite des réels... sauf que... les grecs avaient remarqué il y a plus de 2000 ans un petit grain de sable, un petit problème avec les rationnels, à savoir que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Une brève démonstration du fait que $\sqrt{2}$ *est irrationnel* — On le montre par l'absurde, en supposant le contraire, c'est à dire qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Un travail préliminaire permet de se ramener au cas où, au moins un des deux entiers p et q est impair. On examine alors les conséquences de la relation $p^2 = 2q^2$: cela entraîne alors que p est pair, donc s'écrit $p = 2p_1$, ce qui entraîne à la suite que q est aussi pair, une contradiction.

Notons enfin que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ possèdent une propriété supplémentaire :

Proposition 1.1 $\mathbb{Q}$ *(respectivement* $\mathbb{R}$*) est* ***archimédien****, ce qui signifie :*

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \textit{ (resp. } \mathbb{R}), \textit{ si } a > 0 \textit{ et } b > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{a + \cdots + a}_{n} \geq b$$

On peut traduire cette propriété plus simplement en

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ (resp. } \mathbb{R}), \text{ si } a > 0 \text{ et } b > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad na \geq b.$$

et, si on change le nom de a en ε,

$$\forall \varepsilon, b \in \mathbb{Q} \text{ (resp. } \mathbb{R}), \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ et } b > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b}{n} \leq \varepsilon.$$

Corollaire 1.1

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Une propriété bien utile quand on veut montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.2 Partie entière et densité de $\mathbb{Q}$ dand $\mathbb{R}$

En utilisant la propriété que $\mathbb{R}$ *est archimédien*, nous allons montrer que :

Théorème 1.1 *Pour tout réel* $x \in \mathbb{R}$*, il existe un unique entier relatif* $p \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$p \leq x < p + 1$$

On notera $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ cet entier et on l'appelle la *partie entière* de x.
Démonstration — (1) Commençons par montrer que, si un tel entier existe, il est unique. En effet, si nous supposons qu'il existe deux entiers p et q possédant cette propriété, alors

$$p \leq x < q+1 \quad \text{et} \quad q \leq x < p+1$$

entraînent $p-q<1$ et $-1<p-q$, soit $|p-q|<1$, ce qui n'est possible que si $p=q$ car p et q sont entiers.
(2) Montrons maintenant l'existence de p.

— supposons d'abord que $x>0$. Considérons l'ensemble $A := \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \leq x\}$. Nécessairement $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $x<N$, ce qui prouve qu'un élément $n \in A$ ne peut pas être supérieur ou égal à N. Donc A est borné et contient un nombre fini d'éléments (plus précisément, moins de N éléments). Soit $p \in A$ le maximum de A (c'est à dire le plus grand élément de A). Comme $p \in A$, $p \leq x$ et, comme p est le plus grand élément de A et $p+1>p$, nécessairement $p+1 \notin A$, ce qui s'écrit $x<p+1$. Donc $p \leq x < p+1$.
— si $x=0$, on choisit $p=0$.
— si $x<0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $-x=|x| \leq N$, donc $-N \leq x$ et $-N \in \mathbb{Z}$. Soit $A := \{n \in \mathbb{Z} \ ; \ -N \leq n \leq x\}$. Cet ensemble est non vide ($-N \in A$) et est majoré par 0. Il contient donc un nombre fini d'éléments. Nous choisissons le maximum p de A et nous vérifions comme précédemment que $p \leq x < p+1$.

□

On note

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

la fonction « partie entière ».

On en déduit le résultat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché par un nombre décimal « *avec n chiffres après la virgule* », ce qui signifie qu'il existe un nombre rationnel de la forme $\frac{a_n}{10^n}$, où $a_n \in \mathbb{Z}$, tel que

$$\frac{a_n}{10^n} \leq x < \frac{a_n+1}{10^n}$$

Par exemple, pour $x=\pi$,

n	0	1	2	3	4	5
a_n	3	31	314	3141	31415	314159
$10^{-n}a_n$	3	$3,1$	$3,14$	$3,141$	$3,1415$	$3,14159$

Il suffit de prendre $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor$.

Le théorème précédent nous permet aussi de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que X est dense dans $\mathbb{R}$ si, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$,*

$$\exists x \in \left]a,b\right[\cap X$$

(cette condition peut également s'écrire $\left]a,b\right[\cap X \neq \emptyset$.)

Théorème 1.2 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration — Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N(b-a) > 1$ (l'existence de N s'obtient à nouveau grâce au fait que $\mathbb{R}$ est archimédien) et soit

$$x = \frac{\lfloor Nb \rfloor - 1}{N}$$

Il est clair que $x \in \mathbb{Q}$. D'autre part

$$\begin{aligned} Nb \leq \lfloor Nb \rfloor < Nb + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad Nb - 1 \leq \lfloor Nb \rfloor - 1 < Nb \\ &\Longleftrightarrow \quad b - \frac{1}{N} \leq \frac{\lfloor Nb \rfloor - 1}{N} < b \end{aligned}$$

et comme $N(b-a) > 1 \Longleftrightarrow b - a > 1/N$ entraîne $a = b - (b-a) < b - 1/N$, on en déduit que $a < x < b$. □

Connaissant au moins un exemple de réel dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (par exemple $\sqrt{2}$), on en déduit le corollaire du théorème précédent :

Proposition 1.2 *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration — Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, donc on peut utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour affirmer qu'il existe $y \in \mathbb{Q}$ tel que $a - \sqrt{2} < y < b - \sqrt{2}$. Donc $a < y + \sqrt{2} < b$. Or il se trouve que $x := y + \sqrt{2}$ est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cette dernière assertion se montre par l'absurde : si nous supposons que $x \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = x - y$ est rationnel car x et y le sont, ce qui est impossible. Donc $y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]a, b[$. □

1.3 Mais qu'a donc $\mathbb{R}$ de plus que les autres ?

La différence fondamentale est que :

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.

(Rappelons qu'une *partie* de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. De même, *toute partie non vide et minoré de $\mathbb{R}$ adment une borne inférieure.*)

Définition 1.2 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est **majorée** si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \leq A$$

*Tout réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$ est appelé un **majorant de** A.*

Définition 1.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Une **borne supérieure** de A est un réel ℓ tel que*

*(i) ℓ est un **majorant de** A : $\forall x \in A$, $x \leq \ell$;*

*(ii) ℓ est **inférieur ou égal à tous les autres majorants de** A :*

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad [b \textit{ majore } A] \quad \Longrightarrow \quad \ell \leq b.$$

En d'autres termes, la[1] borne supérieure de A, si elle existe, est **le plus petit majorant**

1. Nous verrons un peu plus loins que, si la borne supérieure existe, celle-ci est unique.

de A.

On traduit souvent la propriété (ii) par sa contraposée :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad b < \ell \quad \Longrightarrow \quad [b \text{ ne majore pas } A]$$

c'est à dire :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad b < \ell \quad \Longrightarrow \quad [\exists x \in A \text{ tel que } b < x]$$

et, finalement, comme tout réel b tel que $b < \ell$ est de la forme $\ell - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad \ell - \varepsilon < x$$

Proposition 1.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors ℓ est une* ***borne supérieure*** *de A si*

$$\forall x \in A, \quad x \leq \ell \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in A, \quad \ell - \varepsilon < x \tag{2}$$

Une première propriété importante est :

Proposition 1.4 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A admet une borne supérieure, celle-ci est unique.*

Par conséquent, si A admet une borne supérieure, **on note** $\sup A$ **la borne supérieure de** A.

Démonstration — Supposons que $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ soient deux bornes supérieures de A. Alors

— comme ℓ_1 est inférieur ou égal à tous les majorants de A et comme ℓ_2 majore A, $\ell_1 \leq \ell_2$;

— comme ℓ_2 est inférieur ou égal à tous les majorants de A et comme ℓ_1 majore A, $\ell_2 \leq \ell_1$.

Donc $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Le résultat fondamental qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ est :

Théorème 1.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si*

(i) $A \neq \emptyset$ *;*

(ii) *A est majoré.*

Alors A admet une borne supérieure.

Un résultat très utile est :

Proposition 1.5 *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si ℓ majore A et si $\ell \in A$, alors ℓ est la borne supérieure de A. Dans ce cas ℓ est le* ***maximum*** *de A.*

Remarque — On définit de même une partie **minorée** de $A \subset \mathbb{R}$, un minorant de A, la borne inférieure $\inf A$, avec les mêmes propriétés. En particulier, *toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

1.4 Complément hors programme : étude d'un exemple

Considérons, par exemple, les ensembles

$$A_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \text{ et } x^2 \leq 2\}$$

et

$$A_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leq x \text{ et } x^2 \leq 2\} = A_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}$$

Les ensembles $A_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{Q}}$ sont tous les deux **non vides**, puisque, par exemple, $1 \in A_{\mathbb{Q}} \subset A_{\mathbb{R}}$. L'ensemble $A_{\mathbb{R}}$ est majoré, par exemple, par 2. En effet, $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 2$$

donc, par contraposée, $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$x^2 \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad x < 2$$

Donc $A_{\mathbb{R}}$ est **majoré** par 2 et, comme $A_{\mathbb{Q}} \subset A_{\mathbb{R}}$, $A_{\mathbb{Q}}$ est aussi majoré par 2.

D'après le théorème précédent, $A_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{Q}}$ admettent des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$: soit

$$\alpha_{\mathbb{R}} := \sup A_{\mathbb{R}} \quad \text{ et } \alpha_{\mathbb{Q}} := \sup A_{\mathbb{Q}}$$

Nous allons étudier plus particulièrement $\alpha = \alpha_{\mathbb{R}}$. Comme α est le plus petit des majorants de $A_{\mathbb{R}}$ et comme 2 majore $A_{\mathbb{R}}$, on en déduit en particulier que $\alpha \leq 2$.

Théorème 1.4 *On a $\alpha > 0$ et $\alpha^2 = 2$.*

Démonstration[2] — (i) Nous montrons que $2 \leq \alpha^2$. Nous utilisons la propriété (i) de la définition de la borne supérieure (*id est* α majore A) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [0 \leq x \text{ et } x^2 \leq 2] \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A_{\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad x \leq \alpha$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$,

$$x^2 \leq 2 \Longrightarrow x \leq \alpha \Longrightarrow x^2 \leq \alpha^2$$

De cette implication nous pouvons déduire en raisonnant par l'absurde que $2 \leq \alpha^2$. Pour cela nous supposons que $\alpha^2 < 2 \Longleftrightarrow 2 - \alpha^2 > 0$ et nous cherchons à obtenir une contradiction, en montrant qu'il existe $x \in A_{\mathbb{R}}$ tel que $\alpha < x$, ce qui est impossible car α est un majorant de $A_{\mathbb{R}}$. Nous cherchons x sous la forme $x = \alpha + \varepsilon$. Nous supposons que $\varepsilon > 0$, de sorte que $\alpha < x$. Il reste donc à trouver ε de façon à ce que $x \in A_{\mathbb{R}}$. Nous calculons $x^2 = (\alpha + \varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2$, qui implique, à cause de $\alpha \leq 2$, que $x^2 < \alpha^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$. Il suffit alors de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $4\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 - \alpha^2$ pour avoir alors $x^2 < \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2$ et donc $x \in A_{\mathbb{R}}$, ce qui est impossible car α est la borne supérieure de $A_{\mathbb{R}}$ et on a en même temps $x > \alpha$.

2. cette démonstration est un peu difficile, il n'est pas demandée de la retenir dans tous ses détails

Pour être complet nous devons trouver une condition suffisante sur ε pour que $4\varepsilon+\varepsilon^2 < 2-\alpha^2$. Pour ne pas se casser la tête, il est commode de remplacer cette inéquation un peu compliquée par une autre condition, plus simple, et qui sera néanmoins suffisante. Pour cela nous supposons que $\varepsilon < 1$, car alors $\varepsilon^2 < \varepsilon$ et donc $4\varepsilon + \varepsilon^2 < 5\varepsilon$. Nous voyons alors que, si de surcroît $5\varepsilon < 2 - \alpha^2$, alors $4\varepsilon + \varepsilon^2 < 5\varepsilon < 2 - \alpha^2$. Ainsi une condition suffisante pour avoir cette majoration est que $0 < \varepsilon < \inf(1, (2 - \alpha^2)/5)$.

(ii) Nous montrons que $\alpha^2 \leq 2$. Pour cela nous utilisons la propriété (ii) de la définition de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A_{\mathbb{R}}, \quad \alpha - \varepsilon < x \quad \Longrightarrow \quad (\alpha - \varepsilon)^2 < x^2 \leq 2$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 \leq 2 + 2\alpha\varepsilon - \varepsilon^2$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela entraîne $\alpha^2 \leq 2$. $\square$

Ainsi $\alpha = \sup A_{\mathbb{R}} = \sqrt{2}$. On peut montrer en adaptant la preuve précédente et en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que, $\alpha_{\mathbb{Q}} = \sqrt{2}$.