Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Jeudi 28 janvier 2021

2 Voisinages, ouverts et fermés

2.1 Voisinages d'un point de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in]0, +\infty[$. La* ***boule ouverte*** *de centre x_0 et de rayon r est l'intervalle ouvert*

$$]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x_0 - r < x < x_0 + r\}$$

Remarques — (1) Noter que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{cc} & x \in]x_0 - r, x_0 + r[\\ \Longleftrightarrow & x_0 - r < x < x_0 + r \\ \Longleftrightarrow & |x - x_0| < r \end{array}$$

(2) Le terme *boule ouverte* peut sembler surprenant *a priori*. La dernière propriété ($|x - x_0| < r$) permet de comprendre que la boule ouverte $]x_0 - r, x_0 + r[$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui sont situés à une distance strictement inférieure à r. Cette façon de définir une boule ouverte se généralise sans difficulté aux boules dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{C}$) et, plus généralement, dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si $z_0 \in \mathbb{C}$ on définit la boule ouverte de centre z_0 et de rayon r comme étant l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| < r$. Cette ensemble se représente graphiquement comme un disque centré en z_0 dans le plan complexe.

Définition 2.2 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un* ***voisinage*** *de x_0 si V contient une boule ouverte centrée en x_0 de rayon strictement positif.*

Autrement dit, V est un voisinage de x_0 si et seulement si $\exists r \in]0, +\infty[$ tel que $]x_0 + r, x_0 + r[\subset V$.

Remarque — Si V est un voisinage de x_0, alors $x_0 \in V$, puisqu'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset V$ et $x_0 \in]x_0 - r, x_0 + r[$. Par contraposée, si $x \notin V$, alors V n'est pas un voisinage de x.

Proposition 2.1 *Si V est un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ et si $V \subset W$, alors W est un voisinage de x.*

La preuve de cette proposition est une application immédiate de la définition d'un voisinage.

Exemples

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

(i) $]0,1[$ est un voisinage de chacun de ses points. En effet, pour tout $x_0 \in]0,1[$, on choisit $r = \min\{x_0, 1-x_0\}$. Comme $0 < x_0 < 1$ et $0 < 1-x_0 < 1$, r est bien un réel strictement positif et strictement plus petit que 1. En fait, on a même $r < 1/2$, car : si $x_0 \in]0,1/2]$, alors, $x_0 \leq 1-x_0$ et donc $r = x_0$ et, si $x_0 \in [1/2,1[$, alors, $1-x_0 \leq x_0$ et donc[2] $r = 1-x_0$. On vérifie alors que $]x_0-r, x_0+r[\subset]0,1[$, car, comme $r \leq x_0$ et $r \leq 1-x_0$, on a, $\forall x \in]x_0-r, x_0+r[$,

$$0 = r - r \leq x_0 - r < x < x_0 + r \leq x_0 + (1-x_0) = 1$$

(ii) $]0,1]$ est un voisinage de n'importe quel point dans $]0,1[$, car $]0,1[$ est un voisinage de chacun de ses points et $]0,1[\subset]0,1]$. En revanche, $]0,1]$ n'est pas un voisinage de 1 (bien que $1 \in]0,1]$). Prouvons-le :

$$\begin{array}{rc} & [\ ]0,1] \text{ est un voisinage de } 1] \text{ est faux} \\ \iff & [\ \exists r > 0, \quad]1, r, 1+r[\subset]0,1]\ ] \text{ est faux} \\ \iff & \forall r > 0, \quad [\ ]1-r, 1+r[\subset]0,1] \text{ est faux }] \\ \iff & \forall r > 0, \quad [\exists x \in]1-r, 1+r[\text{ tel que } x \notin]0,1]\ ] \end{array}$$

et effectivement, pour tout $r > 0$, il existe $\exists x \in]1-r, 1+r[$ tel que $x \notin]0,1]$: il suffit de prendre $x = 1 + r/2$.

(iii) Plus généralement, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$, on montre en adaptant la méthode utilisée au (i) que $]a,b[$ est un voisinage de chacun de ses points.

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ est un voisinage de n'importe quel point dans $]a, +\infty[$, mais n'est pas un voisinage de a.

2.2 Ouverts de $\mathbb{R}$

Définition 2.3 *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{O}$ est une* ***partie ouverte*** *de $\mathbb{R}$, ou un* ***sous-ensemble ouvert*** *de $\mathbb{R}$, ou encore de façon plus concise, un* ***ouvert*** *de $\mathbb{R}$ si $\mathcal{O}$ est un voisinage de chacun de ses points.*

Il est immédiat que : une partie $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ est *ouverte* si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}.$$

Exemples

(i) Tout intervalle ouvert $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet nous avons vu qu'un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

(ii) De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

2. Un autre raisonnement, « à tiroir » consiste à dire que l'on a toujours $x_0 + (1-x_0) = 1$ et que, par conséquent, au moins l'un des deux réels x_0 ou $1-x_0$, doit être plus petit que $1/2$, car dans le cas contraire, la somme serait strictement supérieure à 1, ce qui serait contraditoire.

(iii) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts !

(iv) Mais la liste des ouverts ne s'arrête pas là, loin de là ! en raison du résultat suivant.

Théorème 2.1 *(i) Toute union d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert. Autrement dit, pour toute famille (finie ou infinie) d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, la réunion*

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \qquad \textit{est un ouvert}$$

*(ii) Toute intersection **finie** d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert. Autrement dit, pour toute famille **finie** $(\mathcal{O}_k)_{k=1,\cdots,n}$, l'intersection*

$$\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_n \qquad \textit{est un ouvert}$$

Démonstration — (i) Considérons une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ et soit $\mathcal{O} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Montrons que $\mathcal{O}$ est un ouvert. Soit $x \in \mathcal{O}$. Alors

$$x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \in I, \quad x \in \mathcal{O}_i$$

Comme $\mathcal{O}_i$ est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}_i$. Et comme $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ est un ouvert.
(ii) Considérons une famille finie d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k=1,\cdots,n}$ et soit $\mathcal{O} := \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k$. Montrons que $\mathcal{O}$ est un ouvert. Soit $x \in \mathcal{O}$. Alors

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad x \in \mathcal{O}_k$$

Comme chaque $\mathcal{O}_k$ est un ouvert, $\exists \varepsilon_k > 0$ tel que $]x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k[\subset \mathcal{O}_k$. Choisissons $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$. Ce minimum existe et est strictement positif *parce que* l'ensemble $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ est *fini*. On a alors

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \subset\ ]x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k[\ \subset\ \mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}$$

Donc $\mathcal{O}$ est un ouvert. $\square$

De nouveaux exemples d'ouverts
En conséquence du théorème précédent, toute union d'intervalles ouverts est un ouvert. Ainsi

$$]a, b[\ \cup\ ]c, d[, \quad]a, b[\ \cup\ ]c, d[\ \cup\ ]e, f[\quad \text{sont des ouverts.}$$

Mais une *intersection infinie d'ouverts* n'est pas nécessairement un ouvert, comme nous le verrons à la prochaine séance.