Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Lundi 1er février 2021

2.2 Ouverts de $\mathbb{R}$ (suite et fin)

Nous avons vu qu'une réunion d'ouverts de $\mathbb{R}$ est toujours un ouvert et qu'une intersection *finie* d'ouverts de $\mathbb{R}$ est aussi un ouvert. Dans ce dernier résultat le fait de supposer que l'intersection est finie est capital, car sans cette hypothèse, le résultat est *faux* en général.

Exemple — Considérons la famille $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{O}_n := \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

Chaque $\mathcal{O}_n$ est un ouvert car c'est un intervalle ouvert. En revanche on a :

Proposition 2.1 *Avec les notations précédentes,*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\} \tag{1}$$

et $\{0\}$ n'est pas un ouvert.

Démonstration — (a) Commençons par montrer (1) : cela revient à montrer les doubles inclusions

$$\begin{array}{rl} & \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[\supset \{0\} \\ \text{et} & \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[\subset \{0\} \end{array}$$

La première inclusion équivaut à :

$$0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[\quad \Longleftrightarrow \quad [\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \in]-1/n, 1/n[\ \ ]$$

et est évidente.

La deuxième inclusion équivaut à : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left[x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[\ \right] \Longrightarrow [x = 0]$. Observons que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left[x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[\right] \quad \Longleftrightarrow \quad [\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in]-1/n, 1/n[\ ]$$

Il s'agit donc de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$[\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in]-1/n, 1/n[\ ] \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Intuitivement cette implication nous semble naturelle, mais il n'est pas forcément évident de la montrer directement. En revanche les choses deviennent beaucoup plus claires si nous cherchons à la démontrer par l'absurde, ou bien si nous cherchons à montrer sa *contraposée*. Celle-ci s'écrit

$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad [\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad x \notin\ ]-1/n, 1/n[\ ] \tag{2}$$

En effet si $x \neq 0$, alors on a soit $x > 0$, soit $x < 0$. Supposons par exemple que $x > 0$: alors, en utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, nous pouvons dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < 1/n < x$. Donc $x \notin]-1/n, 1/n[$. Si $x < 0$, le raisonnement est tout à fait similaire. Donc (2) est vrai. Nous avons donc montré (1).
(b) Pour conclure, montrons que $\{0\}$ n'est pas un ouvert. Nous pouvons raisonner par l'absurde : si $\{0\}$ était un ouvert, alors ce serait un voisinage de 0, ce qui signifie qu'il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\ \subset\ \{0\}$, ce qui est impossible. □

2.3 Lien entre voisinages, ouverts et limites de suites

Rappelons une définition déjà vue de la limite d'une suite.

Définition 2.1 (limite d'une suite 1) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \textit{ou} \qquad \begin{array}{ccc} u_n & \longrightarrow & \ell \\ n & \longrightarrow & +\infty \end{array}$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \tag{3}$$

Notons que la conclusion de (3) équivaut à

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \in\ ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

On reconnaît à droite une boule ouverte. Cela nous amène à une définition équivalente.

Définition 2.2 (limite d'une suite 2) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall V \textit{ voisinage de } \ell,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \ \in\ V \tag{4}$$

Cette définition est équivalente à la première. En effet, d'une part, une remarque simple est que toute boule ouverte $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est en particulier un voisinage de ℓ. Donc le critère (4) s'applique si l'on choisit, comme voisinage V de ℓ, une boule ouverte $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, ce qui entraîne que la deuxième définition entraîne la première.

Réciproquement la première définition entraîne la deuxième : en effet pour tout voisinage V de ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\ \subset V$. En appliquant le critère (3) à cette valeur de ε, on déduit que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \ \in\ ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\ \subset V$$

On peut donner une troisième définition.

Définition 2.3 (limite d'une suite 3) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $\ell \in \mathbb{R}$. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \mathcal{O} \text{ ouvert contenant } \ell,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \in \mathcal{O} \tag{5}$$

Cette troisième définition est équivalent aux deux précédentes, comme on peut le montrer en utilisant le fait qu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points. Ainsi :

Théorème 2.1 *Les trois définitions précédentes de la définition d'une suite convergente sont équivalentes.*

2.4 Fermés

Définition 2.4 *Soit* $F \subset \mathbb{R}$. *On dit que* F *est une* ***partie fermée*** *de* $\mathbb{R}$ *ou un* ***sous-ensemble fermé*** *de* $\mathbb{R}$, *ou encore, de façon plus concise, un* ***fermé*** *de* $\mathbb{R}$ *toute partie dont le complémentaire* $\mathbb{R} \setminus F$ *est ouvert.*

Autrement dit, pour faire court :

$$[\ F \text{ est fermé }\ ] \iff [\ \mathbb{R} \setminus F \text{ est ouvert }\ ]$$

Exemples

(i) tout intervalle fermé $[a, b]$ est un fermé, car c'est le complémentaire de l'ouvert $]-\infty, a[\ \cup\ ]b, +\infty[$.

(ii) en particulier un singleton $\{a\} = [a, a]$ est un fermé.

(iii) toute union **finie** d'intervalles fermés est un fermé, par exemple

$$[a, b] \ \cup \ [c, d], \quad [a, b] \ \cup \ [c, d] \ \cup \ [e, f] \quad \text{sont des fermés}$$

(iv) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des fermés, car ce sont les complémentaires de, respectivement, $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

De plus, comme

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \right) = \bigcap_{i\in I} (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_i) \text{ et } \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{k\in\{1,\cdots,n\}} \mathcal{O}_k \right) = \bigcup_{k\in\{1,\cdots,n\}} (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_k)$$

un corollaire immédiat du Théorème 2.1 du cours précédent est le résultat suivant.

Théorème 2.2 *(i) Toute intersection de fermés de* $\mathbb{R}$ *est un fermé. Autrement dit, pour toute famille (finie ou infinie) de fermés* $(F_i)_{i\in I}$, *l'intersection*

$$\bigcap_{i\in I} F_i \quad \textit{est un fermé}$$

*(ii) Toute réunion **finie** de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé. Autrement dit, pour toute famille **finie** $(F_k)_{k=1,\cdots,n}$, lé réunion*

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = F_1 \cap \cdots \cap F_n \qquad \textit{est un fermé}$$

Mais de façon analogue à ce que nous avons vu pour les ouverts, une réunion **infinie** de fermés n'est pas un fermé en général. Ainsi par exemple, pour tout $x \in]0,1]$, $\{x\}$ est un fermé, mais

$$\bigcup_{x\in]0,1]} \{x\} =]0,1] \qquad \text{n'est pas fermé}$$

Enfin, il y a une infinité de parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont ni des fermés, ni des ouverts, en voici quelques exemples :

$$]0,1], \quad]0,1[\cup \{2\}, \quad [0,1[\cup \{2\}, \quad \left\{ \frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Par exemple, pour $]0,1]$, $]0,1[\cup \{2\}$ ou $[0,1[\cup \{2\}$, il suffit de vérifier que ces ensembles ne sont pas ouverts et que leurs complémentaires ne sont pas des ouverts non plus.

2.5 Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.5 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a **est adhérent à** A ou que a **est une valeur d'adhérence de** A si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset \tag{6}$$

autrement, dit, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A$.

*L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est appelé l'**adhérence de** A est est noté $\bar{A}$.*

Il est immédiat que, si $a \in A$, alors, $\forall \varepsilon > 0$, $a \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A$ et donc a est valeur d'adhérence de A. Donc

$$A \ \subset \ \bar{A}$$

Exemple Considérons $A =]0,1]$. D'après la remarque précédente, $\bar{A}$ contient $]0,1]$. Notons que l'on a également $0 \in \bar{A}$. En effet, $\forall \varepsilon > 0$, si $\varepsilon \leq 1$,

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\cap]0,1] =]0,\varepsilon[\neq \ \emptyset$$

car, par exemple $\varepsilon/2 \in]0,\varepsilon[$ (le cas où $\varepsilon < 1$ est encore plus simple à étudier). Donc $[0,1] \ \subset \ \overline{]0,1]} = \bar{A}$. Nous verrons la prochaine fois qu'il y a *égalité* dans cette dernière inclusion.