Raisonnement mathématiques II
Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Jeudi 4 février 2021

Rappel : nous avons vu la définition des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}$ ainsi que certaines de leurs propriétés. Notamment : l'union d'une famille arbitraire d'ouverts est un ouvert et l'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert. De façon symétrique l'intersection d'une famille arbitraire de fermés est un fermé et une union d'une famille *finie* de fermés est un fermé. Il est utile de bien retenir les contre-exemples suivants, pour se souvenir des *cas dangereux* lorsqu'on manipule des intersections ou des réunions infinies :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[\; = \;]0,1] \quad \text{est une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \; = \; [0,1[\quad \text{est une union de fermés qui n'est pas un fermé}$$

Noter que $]0,1]$ et $[0,1[$ ne sont **ni** des ouverts, **ni** des fermés.

2.5 Adhérence (suite et fin)

Rappelons que, si $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on dit que a **est adhérent à** A si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

et que l'adhérence de A est noté $\bar{A}$.

Exemple (suite et fin) Nous avons commencé à étudier l'adhérence de $A =]0,1]$ et nous avons précédemment que $[0,1] \subset \bar{A}$. Montrons qu'il y a égalité dans cette inclusion, il suffit pour cela de montrer l'inclusion inverse $\bar{A} \subset [0,1]$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\; x \in \bar{A} \;] \quad \Longrightarrow \quad [\; x \in [0,1] \;]$$

implication qui est encore équivalente à sa contraposée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\; x \notin [0,1] \;] \quad \Longrightarrow \quad [\; x \notin \bar{A} \;]$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. Supposons par exemple que $x < 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < |x|$ (prendre par exemple $\varepsilon = |x|/2$). Alors, comme $x + \varepsilon < 0$,

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\quad \subset \quad]-\infty, 0[\quad \subset \quad \mathbb{R} \setminus \; [0,1]$$

et donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$. Donc $x \notin \bar{A}$. La preuve dans le cas où $x > 1$ est similaire.□

D'autres exemples d'adhérence

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

(i) $\overline{]0,1[} = \overline{[0,1[} = \overline{]0,1]} = \overline{[0,1]} = [0,1]$.

(ii) $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ car, en effet, $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

(iii) plus généralement, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\bar{A} = \mathbb{R}$. [Rappelons que, par définition, A est dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall a, b \in R$, si $a < b$, alors $]a,b[\, \cap A \neq \emptyset$.] Ainsi $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Théorème 2.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors*
*(a) $\bar{A}$ est le **plus petit fermé** (au sens de l'inclusion) **contenant** A, c'est à dire*

*(i) $A \subset \bar{A}$ et $\bar{A}$ est **fermé** ;*

*(ii) $\forall F \subset \mathbb{R}$, si F est **fermé**, alors $A \subset F \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \subset F$.*

(b) L'adhérence de A est égale à l'intersection de tous les fermés qui contiennent A :

$$\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}\,;\, A \subset F} F$$

Démonstration — Nous montrons d'abord (a) (i). Le fait que $A \subset \bar{A}$ est relativement évident et a déjà été observé, il nous faut donc montrer que $\bar{A}$ est fermé. Pour l'instant la seule méthode que nous connaissons pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est fermée consiste à considérer son complémentaire et à montrer qu'il est ouvert. Le complémentaire $\mathbb{R} \setminus \bar{A}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas adhérents à A, c'est à dire tels que

$$[\forall \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap A \neq \emptyset] \text{ est faux}$$

cela revient à

$$[\exists \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap A = \emptyset] \text{ est vrai} \tag{1}$$

Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{A}$, alors x satisfait la propriété (1). Comme l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points, donc $\forall y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, $\exists r > 0$, $]y - r, y + r[\, \subset\,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, donc

$$]y - r, y + r[\, \cap A \quad \subset \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap A \quad \neq \quad \emptyset$$

donc $y \in \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. Donc $\mathbb{R} \setminus \bar{A}$ est ouvert et $\bar{A}$ est fermé.

Montrons (a) (ii). Soit F un fermé contenant A, pour montrer que $\bar{A} \subset F$, il faut et il suffit de montrer que $\mathbb{R} \setminus F \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Nous traduisons le fait que F est fermé par le fait que $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert et donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \subset \mathbb{R} \setminus F$. Mais de plus $A \subset F$, ce qui équivaut à $\mathbb{R} \setminus F \subset \mathbb{R} \setminus A$, donc

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\quad \subset \quad \mathbb{R} \setminus F \quad \subset \quad \mathbb{R} \setminus A$$

Soit encore $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap A = \emptyset$. Donc x satisfait la propriété (1) plus haut qui caractérise $\mathbb{R} \setminus \bar{A}$ et ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. On a donc bien $\mathbb{R} \setminus F \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$.
Montrons (b). Notons

$$\mathsf{F}_A := \bigcap_{F \text{ fermé}\,;\, A \subset F} F$$

Dans un sens l'inclusion $\bar{A} \subset \mathsf{F}_A$ est une conséquence de la propriété (a) (ii) que nous avons montrée. En effet d'une part F_A est une intersection de fermés et est donc fermé et, d'autre part, cette intersection contient A puisque chaque ensemble F qui intervient dans l'intersection F_A contient A. Donc F_A est fermé et $A \subset \mathsf{F}_A$ et, en appliquant la propriété (a) (ii) à $F = \mathsf{F}_A$ nous en déduisons que $\bar{A} \subset \mathsf{F}_A$.

Dans l'autre sens l'inclusion $\mathsf{F}_A \subset \bar{A}$ est une conséquence de (a) (i) : $\bar{A}$ est un fermé qui contient A donc il fait partie de la famille de fermés F dont on prend l'intersection dans F_A, donc $\bar{A} \subset \bar{A}$. □

Remarque — *La conclusion (i) du théorème précédent possède beaucoup d'analogies avec la définition de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. En effet les propriétés (i) et (ii) signifient que $\bar{A}$ est le plus petit des fermés majorant A, sauf qu'il faut remplacer la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ par la relation d'inclusion $\subset$ dans l'ensemble des parties fermées de $\mathbb{R}$.*

2.6 Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. L'**intérieur** de A est le plus grand ouvert pour l'inclusion contenu dans A, on le note $\mathring{A}$. Cela signifie que :*

*(i) $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{A}$ est **ouvert** ;*

*(ii) $\forall \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, si $\mathcal{O}$ est **ouvert**, alors $\mathcal{O} \subset A \implies \mathcal{O} \subset \mathring{A}$.*

Il est tout à fait légitime de se demander si cette définition a un sens : en effet, est-on sûr que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$ il existe une partie $\mathring{A}$ possédant les propriétés (i) et (ii) ? et, si oui, est-on sûr qu'elle est unique ? La réponse est positive. En effet, l'ensemble $\mathring{A} = \mathbb{R} \setminus (\overline{\mathbb{R} \setminus A})$ est bien défini et le théorème précédent nous dit que $\mathring{A}$ satisfait bien les propriétés (i) et (ii) de la définition de l'intérieur de A.

Exemples

(i) $\overset{\circ}{]a,b[} = \overset{\circ}{]a,b[} = \overset{\circ}{]a,b]} = \overset{\circ}{[a,b[} = \overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[$.

(ii) si $A = [a,b[\cup [c,d]$, $\mathring{A} =]a,b[\cup]c,d[$.

(iii) si $A = \{a\}$, $\mathring{A} = \emptyset$

(iv) $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Proposition 2.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ alors*

(i) A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$

(ii) A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Démonstration — La propriété (i) se démontre à partir du théorème 2.1. La propriété (ii) s'en déduit par passage au complémentaire (à faire en exercice). □

2.7 Lien entre ensembles fermés et limites de suites

Proposition 2.2 *Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie **fermée** et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans F. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in F$.*

Démonstration — Soit $F \subset \mathbb{R}$ un fermé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui prend ses valeurs dans F et qui converge vers ℓ. Nous allons raisonner par l'*absurde* et nous supposons que $\ell \in \mathbb{R}\setminus F$. Comme F est fermé, $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert et donc $\exists r > 0$ tel que $]\ell - r, \ell + r[\ \subset\ \mathbb{R} \setminus F$.

Mais par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Cette propriété marche bien évidemment pour $\varepsilon = r$, on en déduit l'existence d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in]\ell - r, \ell + r[$. Mais comme la suite prend ses valeurs dans F, on a aussi $u_n \in F$. Donc $]\ell - r, \ell + r[\ \cap\ F \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait que $]\ell - r, \ell + r[\ \subset\ \mathbb{R} \setminus F$: c'est impossible. Donc $\ell \in F$. $\square$

Corollaire 2.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans A. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in \bar{A}$.*

Démonstration — En effet si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans A, *a fortiori* elle prend ses valeurs dans $\bar{A}$. Comme $\bar{A}$ est fermé, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $F = \bar{A}$. $\square$