Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Lundi 8 février 2021

2.8 Parties séquentiellement fermées

Définition 2.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est* ***séquentiellement fermée*** *si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, si :*

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans A, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{A}$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$;

alors $\ell \in A$.

Cette notion nous fournit une autre définition possible des fermés. En effet :

Théorème 2.1 *Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$,*

$$A \text{ est séquentiellement fermé} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est fermé}$$

Démonstration — Nous avons montré précédemment que, si A est fermé, alors la limite de toute suite convergente prenant ses valeurs dans A est dans A, c'est à dire le sens $\Longleftarrow$ dans le théorème. Nous devons montrer la réciproque, à savoir : [A est séquentiellement fermé] $\Longrightarrow$ [A est fermé]. Nous montrons pour cela la contraposée :

$$[A \text{ n'est pas fermé}] \Longrightarrow [A \text{ n'est pas séquentiellement fermé }]$$

Soit donc $A \subset \mathbb{R}$ et supposons que A n'est pas fermé, ce qui équivaut à :

$$\begin{array}{cc} & \mathbb{R} \setminus A \text{ n'est pas ouvert} \\ \Longleftrightarrow & [\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus A, \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \subset\ \mathbb{R} \setminus A\ ] \text{ est faux} \\ \Longleftrightarrow & [\ \exists \ell \in \mathbb{R} \setminus A, \forall \varepsilon > 0,\ ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\ \not\subset\ \mathbb{R} \setminus A\ ] \text{ est vrai} \\ \Longleftrightarrow & [\ \exists \ell \in \mathbb{R} \setminus A, \forall \varepsilon > 0,\ ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\ \cap A \neq \emptyset\ ] \text{ est vrai} \end{array}$$

Soit donc $\ell \in \mathbb{R} \setminus A$ satisfaisant la dernière propriété. Nous appliquons cette propriété pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous obtenons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $]\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n}[\ \cap A$ est non vide et donc contient au moins un élément u_n. Cela nous permet de construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui prend ses valeurs dans A et telle que $|u_n - \ell| < \frac{1}{n}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Comme $\ell \notin A$, A n'est donc pas séquentiellement fermé. $\square$

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Grâce à ce théorème nous diposons de deux critères différents pour montrer qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est fermée (ou n'est pas fermée) : le complémentaire de A est ouvert, ou bien A est séquentiellement fermé. En particulier, pour montrer qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ n'est *pas* fermée, il suffit de trouver une suite prenant ses valeurs dans A et qui converge vers une limite qui n'est pas dans A (elle réussit à s'échapper).

Par exemple si $A =]0,1]$, nous considérons la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$: cette suite prend ses valeurs dans $]0,1]$ mais converge vers 0 qui n'est pas dans A, donc A n'est pas fermé.

2.9 Le bord d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$, le* ***bord*** *de A ou la* ***frontière*** *de A est l'ensemble*

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

Exemples À partir des exemples vus précédemment, il est facile de conclure que

(i) $\partial]a,b[= \partial]a,b] = \partial[a,b[= \partial[a,b] = \{a,b\}$

(ii) si a,b,c et d sont distincts deux à deux, $\partial(\ [a,b[\cap [c,d]\ ) = \{a,b,c,d\}$

(iii) $\partial\{a\} = \{a\}$

(iv) $\partial\mathbb{R} = \partial\emptyset = \emptyset$

(v) $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Dans des cas non pathologiques (c'est à dire si on regarde des unions d'intervalles et si on exclut des choses comme $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), le bord correspond à l'idée intuitive que l'on se fait de la frontière d'un domaine.

2.10 Voisinages généralisés ou dans une partie $A \subset \mathbb{R}$

Par analogie avec la notion de voisinage d'un point et, bien que $+\infty$ et $-\infty$ ne soient pas des réels (mais à un niveau naif, des concepts pour représenter quelque chose d'illimité), nous définissons la notion de voisinage de $\pm\infty$.

Définition 2.3 *Soit $V \subset \mathbb{R}$*

- *V est un* ***voisinage de*** *$+\infty$ si $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $[a,+\infty[\ \subset V$.*
- *V est un* ***voisinage de*** *$-\infty$ si $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty,b]\ \subset V$.*

Remarquer qu'on aurait pu utiliser des intervalles de la forme $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$ sans que cela change le sens de la définition.

Cette notion est adaptée à l'étude de limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ou de situations telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (pour $a \in \mathbb{R}$), comme nous le verrons plus loin.

Définition 2.4 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A}$. Un* ***voisinage de*** *a* ***dans*** *A est l'intersection d'un voisinage V de a avec A.*

Exemples

(i) Si $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, alors on a bien $a \in \bar{A} = \mathbb{R}$ et un voisinage de a dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est de la forme $V \setminus \{a\}$, où V est une voisinage de a, et est appelé un *voisinage épointé* de a.

(ii) Si $A =]-\infty, a[$, alors $a \in \bar{A} =]-\infty, a]$ et un voisinage de a dans $]-\infty, a[$ est de la forme $V \cap]-\infty, a[$, où V est une voisinage de a, et est appelé un *voisinage à gauche* de a.

(iii) Si $A =]a, +\infty[$, alors $a \in \bar{A} = [a, +\infty[$ et un voisinage de a dans $]a, +\infty[$ est de la forme $V \cap]a, +\infty[$, où V est une voisinage de a, et est appelé un *voisinage à droite* de a.

3 Fonctions d'une variable réelle

3.1 Limites d'une fonction en un point

Commençons par rappeler la définition d'une limite que vous avez peut-être déjà vue.

Définition 3.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A}$. Soit $f : A :\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$

On note alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell \quad \textit{ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté,} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Comme nous l'avons déjà remarqué à propos des limites de suites, la condition $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, exprimant le fait que l'on peut garantir que $f(x)$ prend ses valeurs dans une boule centrée en ℓ de rayon arbitrairement petit, pourvu que x soit suffisamment proche de a. Nous pouvons traduire cela en terme de voisinage.

Définition 3.2 *$f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et $x \to a$ si*

$$\forall V, \textit{voisinage de } \ell, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V \tag{2}$$

Mais la condition $\exists \alpha > 0, |x - a| < \alpha$ peut se traduire aussi en terme de voisinage :

Définition 3.3 *$f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et $x \to a$ si*

$$\forall V, \textit{voisinage de } \ell, \exists U, \textit{voisinage de } a, \ \forall x \in A, \quad x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V \tag{3}$$

Enfin la condition $f(x) \in V$ équivaut à $x \in f^{-1}(V)$ et donc la condition (3) signifie que, pour tout voisinage V de ℓ, $f^{-1}(V)$ contient un voisinage[2] de a dans A, ce qui fait que $f^{-1}(V)$ est lui-même un voisinage de a dans A. On a donc une dernière définition :

2. donc l'intersection de A et d'une boule ouverte centrée en a

Définition 3.4 *$f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et $x \to a$ si*

$$\forall V, \text{ voisinage de } \ell, \quad f^{-1}(V) \text{ est l'intersection d'un voisinage de } a \text{ avec } A \tag{4}$$

Proposition 3.1 *Les quatre définitions précédentes sont équivalentes.*

(Rappelons que $f^{-1}(V) = \{x \in A\ ;\ f(x) \in A\}$ est l'image inverse ou image réciproque de la partie V par f.)

3.2 Limite d'une fonction en $\pm\infty$

Nous pouvons de même donner plusieurs présentations de la définition d'une fonction qui tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 3.5 *1) Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non majorée. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \quad x > M \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{5}$$

2) Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non minorée. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \quad x < M \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{6}$$

Ces définitions admettent différentes traductions, dont la suivante.

Définition 3.6 *On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et $x \to \pm\infty$ si*

$$\forall V, \text{ voisinage de } \ell, \exists U, \text{ voisinage de } \pm\infty, \ \forall x \in A, \quad x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V \tag{7}$$

Ou enfin

Définition 3.7 *On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque $x \in A$ et $x \to \pm\infty$ si*

$$\forall V, \text{ voisinage de } \ell, \quad f^{-1}(V) \text{ est l'intersection d'un voisinage de } \pm\infty \text{ avec } A \tag{8}$$

3.3 Fonction qui tend vers $\pm\infty$

Définition 3.8 *Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \bar{A}$ et soit $f : A :\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
1) On dit que $f(x)$ converge vers $+\infty$ lorsque $x \in A$ et x tend vers a si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \tag{9}$$

2) On dit que $f(x)$ converge vers $-\infty$ lorsque $x \in A$ et x tend vers a si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) < M \tag{10}$$

Avec la traduction

Définition 3.9 *On dit que $f(x)$ converge vers $\pm\infty$ lorsque $x \in A$ et x tend vers a si*

$$\forall V, \text{ voisinage de } \pm\infty, \quad f^{-1}(V) \text{ est l'intersection d'un voisinage de } a \text{ avec } A \tag{11}$$

3.4 Conclusion sur les limites

On l'aura compris dans cette suite d'exemples, si $a \in \mathbb{R}$ ou si $a = \pm\infty$ et si $\ell \in \mathbb{R}$ ou si $\ell = \pm\infty$, on aura que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x est dans A et tend vers a si

$$\forall V, \text{voisinage de } \ell, \quad f^{-1}(V) \text{ est l'intersection d'un voisinage de } a \text{ avec } A \tag{12}$$

Noter que, **si A est lui-même un voisinage de a** (par exemple si $A = \mathbb{R}$) cette dernière proposition équivaut à

$$\forall V, \text{voisinage de } \ell, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a$$