Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Jeudi 11 février 2021

3.4 Définition générale de la limite d'une fonction (suite et fin)

Nous avons vu la dernière fois que, si $a \in \mathbb{R}$ ou si $a = \pm\infty$ et si $\ell \in \mathbb{R}$ ou si $\ell = \pm\infty$, $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x est dans A et tend vers a si

$$\forall V, \text{voisinage de } \ell, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ dans } A$$

et que, si A est un voisinage de a, $f^{-1}(A)$ est un voisinage de a dans A (c'est à dire l'intersection d'un voisinage de a avec A) ssi c'est un voisinage de a au sens usuel.

3.5 Opérations sur les limites

3.5.1 Opérations algébriques

Théorème 3.1 *Soit f, g deux fonctions sur un ensemble A et $a \in \bar{A}$. Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim_{x\to a; a\in A} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a; a\in A} g(x) = \ell_2$. Alors*

(i) $\lim_{x\to a; a\in A}(f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$;

(ii) si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a; a\in A} \lambda f(x) = \lambda \ell_1$;

(iii) $\lim_{x\to a; a\in A}(f(x)g(x)) = \ell_1 \ell_2$;

(iv) si $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a; a\in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration — Ecrivons les hypothèses

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha_1 \implies |f(x) - \ell_1| < \varepsilon_1 \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha_2 \implies |f(x) - \ell_2| < \varepsilon_2 \tag{2}$$

Pour montrer chacune des assertions (i) à (iv), le bon réflexe est de chercher d'abord à majorer la quantité qui intervient tout à la fin de la conclusion que l'on veut montrer.

(i) Ainsi par exemple, pour (i), la conclusion recherchée est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

on commence donc par majorer $|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)|$, en utilisant ici l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |(f(x) - \ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \\ &\leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \end{aligned}$$

[1] Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Grâce à (1) et (2) on connaît des conditions suffisantes pour que $|f(x)-\ell_1|<\varepsilon_1$ et $|f(x)-\ell_2|<\varepsilon_2$: si ces conditions sont réunies, on déduit de ce qui précède que $|f(x)+g(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

On fait alors une synthèse de cette analyse rapide : pour tout $\varepsilon>0$, on utilise (1) et (2) avec, respectivement, $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ et $\varepsilon_2=\varepsilon/2$. Alors,

$$\left.\begin{array}{l}\exists\alpha_1>0,\forall x\in A,\quad |x-a|<\alpha_1 \implies |f(x)-\ell_1|<\varepsilon/2\\ \exists\alpha_2>0,\forall x\in A,\quad |x-a|<\alpha_2 \implies |f(x)-\ell_1|<\varepsilon/2\end{array}\right\}\implies |f(x)+g(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon$$

et donc il suffit de choisir $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$ pour obtenir la conclusion. En effet on a alors

$$\forall x\in A,\ |x-a|<\alpha \implies \left\{\begin{array}{l}|x-a|<\alpha_1\\ |x-a|<\alpha_2\end{array}\right\}\implies |f(x)+g(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon$$

Les preuves de (ii), (iii) et (iv) suivent le même principe.
(ii) Pour montrer (ii), on part de

$$|\lambda f(x)-\lambda\ell_1|=|\lambda|\ |f(x)-\ell_1|$$

(iii) Pour (iii), on suit la même stratégie, mais c'est un peu plus délicat. On part de

$$\begin{array}{rcl}|f(x)g(x)-\ell_1\ell_2| & = & |f(x)(g(x)-\ell_2)+(f(x)-\ell_1)\ell_2|\\ & \leq & |f(x)(g(x)-\ell_2)|+|(f(x)-\ell_1)\ell_2|\\ & = & |f(x)-\ell_1|\ |\ell_2|+|f(x)|\ |g(x)-\ell_2|\end{array}\tag{3}$$

Le terme $|f(x)-\ell_1|\ |\ell_2|$ ne pose pas plus de difficulté que dans le cas précédent ($|\ell_2|$ y joue le même rôle que $|\lambda|$ dans (ii)). La difficulté vient du deuxième terme, car $|f(x)|$ n'est pas constant. La solution réside dans l'observation que **le fait que $f(x)$ admet une limite finie lorsque $x\to a$ implique que $f(x)$ est borné sur un voisinage de** a. Cela signifie que

$$\exists C>0,\exists r>0,\forall x\in A,\quad |x-a|<r\implies |f(x)|\leq C$$

On pourra donc supposer que, si x est suffisamment proche de a, $|f(x)|\leq C$, ce qui permettra de déduire de l'inégalité (3) que

$$|f(x)g(x)-\ell_1\ell_2|<|\ell_2|\ |f(x)-\ell_1|+C\ |g(x)-\ell_2|\tag{4}$$

Faisons la synthèse : pour tout $\varepsilon>0$, utilisons les hypothèses (1) avec $\varepsilon_1=\varepsilon/(2|\ell_2|)$ et (2) avec $\varepsilon_2=\varepsilon/2C$ (on suppose ici que $\ell_2\neq 0$, noter que le cas où $\ell_2=0$ est encore plus simple), cela entraîne l'existence de $\alpha_1>0$ et $\alpha_2>0$ tels que

$$\forall x\in A,\ \left.\begin{array}{l}|x-a|<\alpha_1 \implies |f(x)-\ell_1|<\varepsilon/2|\ell_2|\\ |x-a|<\alpha_2 \implies |g(x)-\ell_2|<\varepsilon/2C\end{array}\right\}\implies |\ell_2|\ |f(x)-\ell_1|+C|g(x)-\ell_2|<\varepsilon$$

Enfin, pour que cette dernière inégalité serve à quelque chose, il faut que (4) soit vraie, ce qui nécessite de supposer aussi que $|x-a|<r$. En conclusion nous prenons donc $\alpha=\min(r,\alpha_1,\alpha_2)$. Alors, $\forall x\in A$,

$$|x-a|<\alpha \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} |x-a|<r & \Longrightarrow & |f(x)|\leq C \\ |x-a|<\alpha_1 & \Longrightarrow & |f(x)-\ell_1|<\varepsilon/2|\ell_2| \\ |x-a|<\alpha_2 & \Longrightarrow & |g(x)-\ell_2|<\varepsilon/2C \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x)g(x)-\ell_1\ell_2|<\varepsilon$$

(iv) La preuve de (iv) suit le même schéma, en supposant que $\ell_2\neq 0$. On part de :

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right| &= \left|\frac{f(x)\ell_2-\ell_1 g(x)}{\ell_2 g(x)}\right| \\ &= \frac{|(f(x)-\ell_1)\ell_2+(\ell_2-g(x))\ell_1|}{|\ell_2 g(x)|} \\ &\leq \frac{|(f(x)-\ell_1)|\ |\ell_2|+|\ell_2-g(x)|\ |\ell_1|}{|\ell_2|\ |g(x)|} \end{aligned}$$

et on raisonne de la même façon. Comme nous allons le voir plus bas, l'hypothèse $\ell_2\neq 0$ garantit qu'il existe une constante $h>0$ et $r>0$ tels que $\forall x\in A$, $|x-a|<r \Longrightarrow |g(x)|\geq h$ et donc on a alors

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right| \leq \frac{1}{h}|(f(x)-\ell_1)|+\frac{|\ell_1|}{h|\ell_2|}|(g(x)-\ell_2)|$$

En effet, il suffit de prendre $h=|\ell_2|/2$: cette quantité est strictement positive car $\ell_2\neq 0$ et, comme $\lim_{x\to a;x\in A} g(x)=\ell_2$,

$$\text{pour } \varepsilon=|\ell_2|/2>0, \exists r>0, \forall x\in A, \quad |x-a|<r \Longrightarrow |g(x)-\ell_2|<|\ell_2|/2,$$

ce qui entraîne par l'inégalité triangulaire inverse $|\ |g(x)|-|\ell_2|\ |<|g(x)-\ell_2|<|\ell_2|/2$, soit : $|\ell_2|-|\ell_2|/2<|g(x)|<|\ell_2|+|\ell_2|/2$. Donc en particulier $|\ell_2|/2<|g(x)|$. □

3.5.2 Composition de fonctions

Théorème 3.2 *Soit $A,B\subset\mathbb{R}$, $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ et $f:B\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g(A)\subset B$, $a\in\bar{A}$ et $b\in\bar{B}$ Soit $\ell\in\mathbb{R}$, on suppose que*

$$\lim_{x\to a;x\in A} g(x)=b \quad \textit{et} \quad \lim_{y\to b;y\in b} f(y)=\ell$$

Alors

$$\lim_{x\to a;x\in A} f\circ g(x)=\ell$$

Démonstration — A nouveau on raisonne en partant de la fin, c'est à dire du dernier terme qui intervient dans la conclusion : $|f(g(x))-\ell|$. On **fixe** une valeur $\varepsilon>0$ quelconque et on cherche une condition sur $x \in A$ pour garantir que $|f(g(x)) - \ell| < \varepsilon$. D'après l'hypothèse sur f, on sait que :

$$\exists \beta > 0, \forall y \in B, \quad |y - b| < \beta \Longrightarrow |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

et en particulier, comme $\forall x \in A$, $g(x) \in B$, cela s'applique pour $y = g(x)$ avec $x \in A$:

$$\exists \beta > 0, \forall x \in A, \quad |g(x) - b| < \beta \Longrightarrow |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon$$

Il faut donc trouver une condition pour que $|g(x) - b| < \beta$. C'est là que l'hypothèse sur g intervient et nous permet d'écrire, étant donné $\beta > 0$,

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |g(x) - b| < \beta$$

Il ne reste plus qu'à concaténer les deux implications :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |g(x) - b| < \beta \Longrightarrow |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon$$

$\square$

3.5.3 Théorème des gendarmes pour les fonctions

Théorème 3.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. Soit $a \in \bar{A}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(i) $\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

(ii)

$$\lim_{x \to a; x \in A} f(x) = \lim_{x \to a; x \in A} h(x) = \ell$$

Alors

$$\lim_{x \to a; x \in A} g(x) = \ell$$

Démonstration — L'idée de la preuve repose sur le fait que, si l'on sait (pour $x \in A$ vérifiant certaines hypothèses et $\varepsilon > 0$) que

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \\ |h(x) - \ell| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \end{aligned}$$

alors, en utilisant l'hypothèse (i), on a

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

et que la majoration finale dans la conclusion recherchée est

$$|g(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

Les détails de la rédaction de la preuve complète sont laissés à la lectrice ou au lecteur à titre d'exercice (procéder comme dans les preuves des théorèmes précédents). $\square$

4 Fonctions continues

4.1 Définitions

Définition 4.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$ et soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est* ***continue en*** *a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{5}$$

La parenté de cette définition avec celle de la limite est immédiate et on voit que (5) est équivalent à :

$$\lim_{x \to a; x \in A} f(x) = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a; x \in A \setminus \{a\}} f(x) = f(a)$$

Les différentes versions de la définition d'une limite que nous avons vues s'appliquent et, en particulier, nous avons la définition équivalente suivante.

Définition 4.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$ et soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est* ***continue en*** *a si l'image inverse par f de tout voisinage V de $f(a)$ est l'intersection de A avec un voisinage de a.*

En pratique, A **sera le plus souvent un voisinage de** a et on dispose alors d'un critère encore plus simple.

Proposition 4.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$ et soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que A* ***est un voisinage de*** *a. Alors*

f est **continue en** a si l'image inverse par f de tout voisinage V de $f(a)$ est un voisinage de a.

Définition 4.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est* ***continue sur*** *A si f est continue en chaque point de A.*

A nouveau, en pratique, A **sera le plus souvent un voisinage de chacun de ses points**, c'est à dire **un ouvert**. On a alors le résultat suivant.

Théorème 4.1 *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un* ***ouvert*** *de $\mathbb{R}$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, alors*

f est **continue sur** U si l'image inverse par f de tout ouvert est un ouvert.

La preuve de ce résultat est simple et repose sur le fait qu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points et qu'une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ssi V contient un ouvert contenant a.

Exemples

(i) la fonction logarithme définie sur $U =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ est continue. L'image inverse par f d'un intervalle ouvert $]a, b[$ (pour prendre un exemple simple d'ouvert) est l'ouvert $]e^a, e^b[$.

(ii) la fonction sinus définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$. L'image inverse par f d'un intervalle $]a, +\infty[$ est :
- — $\emptyset$ si $a \geq 1$,
- — $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\theta + 2k\pi, -\theta + (2k+1)\pi[$, où θ est l'unique réel dans $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\sin\theta = a$, si $-1 < a < 1$ ($\theta = \arcsin x$, voir la figure)
- — $\mathbb{R} \setminus \{-\pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ si $a = -1$
- — $\mathbb{R}$ si $a < -1$.

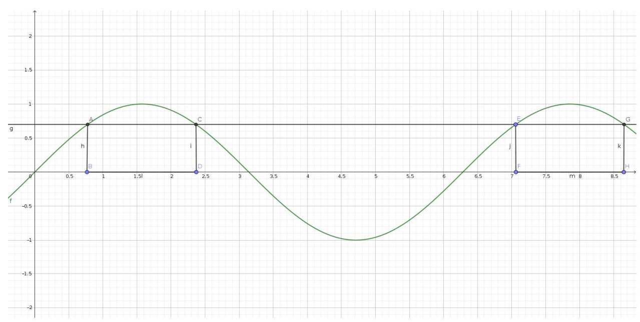

FIGURE 1 – Sur cette figure, $-1 < a < 1$, la droite horizontale passant par les points A, C, E et G est la droite d'équation $y = a$ et les intervalles $]B, D[=]\theta, \pi - \theta[$ et $]F, H[=]2\pi + \theta, 3\pi - \theta[$ sont des parties de l'ensemble $\sin^{-1}(]a, +\infty[)$.

(iii) la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car elle n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$). Ainsi par exemple $\lim_{x\to 0; x<0} E(x) = -1$ et $\lim_{x\to 0; x\geq 0} E(x) = 0$. Si $U =]-1/2, 1/2[$, $E^{-1}(U) = [0, 1[$ n'est pas un ouvert.

4.2 Prolongement par continuité

Définition 4.4 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A} \setminus A$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que*

$$\lim_{x\to a; x\in A} f(x) \text{ existe et vaut } \ell$$

alors la fonction $\bar{f} : A \cap \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
- — $\forall x \in A,\ \bar{f}(x) = f(x)$
- — $\bar{f}(a) = \ell$

est appelé le ***prolongement par continuité de f en** a.*

Le terme de *prolongement par continuité* est tout à fait naturel à cause du résultat suivant.

Proposition 4.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A} \setminus A$. Si f admet un prolongement par continuité en a, alors :*

(i) celui-ci est unique

(ii) la fonction $\bar{f}$ est continue en a.

La preuve de cette proposition est immédiate.

Exemples

(i) Si $A = [0, 1[$, $a = 1$, et, $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors, $\forall x \in [0, 1[]$, $\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(ii) Si $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, alors on montre que $\lim_{x \to 0; x \neq 0} f(x)$ existe et vaut 1. On peut donc prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $\bar{f}(0) = 1$.

4.3 Le théorème des valeurs intermédiaires

C'est un des résultats les plus importants sur les fonctions continues. Il exprime un fait qui semble intuitivement évident. Néanmoins sa preuve, que nous verrons à la prochaine séance, n'est pas immédiate.

Théorème 4.2 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Remarques : a) dans ce résultat, deux hypothèses sont primordiales :

— le fait que la fonction f soit continue ;

— le fait qu'elle soit définie sur un **intervalle**.

b) de façon précise, la conclusion du théorème est :

— si $f(a) \leq f(b)$, alors $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists x \in [a, b]$, $f(x) = y$.

— si $f(a) \geq f(b)$, alors $\forall y \in [f(b), f(a)]$, $\exists x \in [a, b]$, $f(x) = y$.

c) **Attention !** une valeur y entre $f(a)$ et $f(b)$ peut être atteinte plusieurs fois (autrement dit, il peut y avoir plusieurs valeurs de $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$).

De même rien n'interdit qu'une valeur $y \in \mathbb{R} \setminus [f(a), f(b)]$ (ou $\in \mathbb{R} \setminus [f(b), f(a)]$) soit égale à $f(x)$, pour une certaine valeur $x \in [a, b]$.

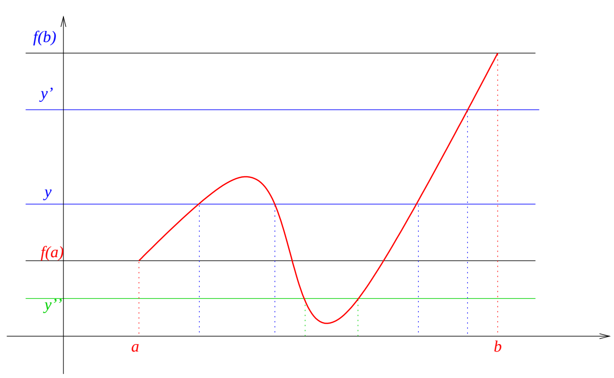

FIGURE 2 – Sur cette figure, $f(a) < f(b)$, les valeurs y, y' sont dans $[f(a), f(b)]$ et conformément au théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur $x \in [a, b]$ dont l'image par f est y ou y' La valeur y'' n'est pas dans $[f(a), f(b)]$, mais cela n'interdit pas qu'elle soit atteinte par f.