Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein[1], janvier–avril 2021

Lundi 15 février 2021

4.3 Le théorème des valeurs intermédiaires (suite et fin)

Rappelons l'énoncé de ce théorème que nous avons donné à la dernière séance.

Théorème 4.1 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* ***continue****. Alors* f *prend toutes les valeurs comprises entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*.*

4.3.1 La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Nous excluons le cas $f(a) = f(b)$, qui est immédiat et nous supposons que $f(a) \neq f(b)$. Nous traiterons uniquement le cas où $f(a) < f(b)$, le cas inverse étant totalement similaire. Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, nous devons prouver l'existence d'une valeur $c \in [a,b]$ telle que $f(c) = y$. Si $y = f(a)$ ou $y = f(b)$, la solution est immédiate (prendre $c = a$ ou $c = b$ respectivement). Nous supposerons donc que $y \in]a,b[$. Avant d'aller pêcher la bonne valeur $c \in]a,b[$ telle que $f(c) = y$, nous devons trouver le stratagème pour l'identifier parmi tous les éléments de $]a,b[$. Nous nous inspirons pour cela de la figure ci-contre.

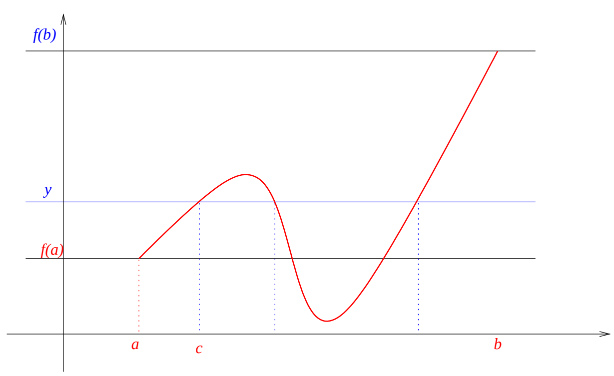


FIGURE 1 – Comment choisir $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = y$? Une façon de faire est de choisir la plus petite valeur au-dessus de laquelle le graphe de f croise la droite horizontale d'ordonnée y.

Nous définissons donc l'ensemble

$$A := \{x \in [a,b] \ ; \ \forall t \in [a,x], f(t) \leq y\}$$

et nous allons montrer que A admet une borne supérieure, puis que la borne supérieure de A est une valeur $c \in]a,b[$ telle que $f(c) = y$.

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Démontrer que A admet une borne supérieure est simple grâce au théorème fondamental qui caractérise $\mathbb{R}$: A est non vide, car $a \in A$, puisque $f(a) < y$ et A est majoré par b, donc $\sup A$ existe.

Posons $c = \sup A$, il nous faut maintenant montrer que $f(c) = y$.

— preuve de $f(c) \leq y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans A qui converge vers c. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in A \quad \Longleftrightarrow \quad [\ \forall t \in [a, u_n],\ f(t) \leq y\ ] \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \leq y$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ et en utilisant le **fait que f est continue**, on en déduit que $f(c) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \leq y$.

— preuve de $f(c) \geq y$. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons que $f(c) < y$, ce qui revient à supposer que $y - f(c) > 0$. Ecrivons que f est **continue** en c :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], \quad |x - c| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

ce qui signifie encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], \quad |x - c| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

Nous utilisons cette propriété en choisissant une valeur $\varepsilon > 0$ telle que $\varepsilon < y - f(c)$. Cela nous donne en particulier

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], \quad |x - c| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(c) + \varepsilon < f(c) + (y - f(c)) = y$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]c - \alpha, c + \alpha[,\ f(x) < y$. D'une part, comme $c = \sup A$, $c - \alpha$ n'est pas un majorant de A, donc $\exists x \in A$ tel que $c - \alpha < x \leq c$; par définition de A, cela signifique $\forall t \in [a, x],\ f(t) \leq y$. En conclusion,

$$\forall t \in [a, x] \cup]c - \alpha, c + \alpha[= [a, c + \alpha[, \quad f(x) \leq y$$

Cela montre que $[a, c+\alpha[\subset A$ ce qui **contredit** le fait que c soit la borne supérieure de A. Cela est impossible. Donc $f(c) \geq y$.

En conclusion $f(c) = y$. □

4.3.2 Conséquences du théorème des valeurs intermédiaires

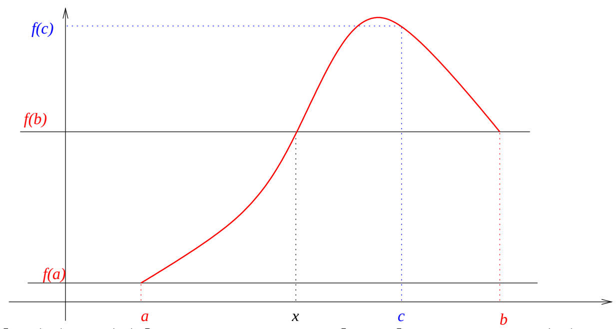
Un premier résultat est le suivant.

Corollaire 4.1 *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. Si f est* ***injective****, alors f est une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.*

Démonstration — Nous excluons le cas où $a = b$ (alors l'intervalle $[a, b]$ est réduit à un point) et supposons $a < b$. Comme f est injective, il est nécessaire que $f(a) \neq f(b)$. Nous supposerons que $f(a) < f(b)$ (comme précédemment le cas inverse est similaire). Comme

f est injective, il suffit juste de montrer que l'image de f est exactement $[f(a), f(b)]$ pour prouver que f est une bijection entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que $f([a, b]) \supset [f(a), f(b)]$. Il nous reste donc à montrer l'inclusion inverse, à savoir $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$. Nous le montrons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \notin [f(a), f(b)]$. Si par exemple $f(c) > f(b)$, nous pouvons alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a, c]$:



Nous en déduisons que, comme $y = f(b) \in]f(a), f(c)[$, il existe $x \in]a, c[$ tel que $f(x) = f(b)$. Or $x < c < b$ et donc $x \neq b$, ce qui contredit le fait que f est injective. Cela est impossible. Si $f(c) < f(a)$, on fait un raisonnement similaire pour prouver l'existence d'un élément $x \in]c, b[$ tel que $f(x) = f(a)$, ce qui aboutit aussi à une contradiction. Donc $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. $\square$

Nous en déduisons immédiatement :

Corollaire 4.2 *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Si f est **strictement monotone**, alors f est une **bijection** entre $[a, b]$ et l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.*

Démonstration — Ce résultat est une conséquence immédiate du résultat précédent puisque toute application strictement monotone **sur un intervalle** est injective. $\square$

Ce dernier résultat admet lui-même une sorte de réciproque.

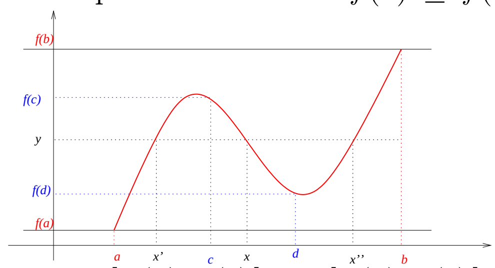
Corollaire 4.3 *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Si f est une **bijection** entre $[a, b]$ et l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$, alors f est **strictement monotone**.*

Démonstration — Nous supposons à nouveau, sans perte de généralité, que $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit f une bijection continue entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$. Nous allons montrer qu'alors f est strictement croissante. Nous raisonnons *par l'absurde* et nous supposons qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \geq f(d)$. Alors

— il est impossible que $f(c) = f(d)$ car $c \neq d$ et cela contredirait le fait que f est une bijection ;

— de plus $f(c)$ et $f(d)$ sont dans $[f(a), f(b)]$ puisque f est une bijection entre $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$;

La seule possibilité qui reste est donc $f(a) \leq f(d) < f(c) \leq f(b)$, comme illustré sur cette figure :



Choisissons une valeur $y \in]f(d), f(c)[$. Alors $y \in]f(a), f(c)[$, $y \in]f(d), f(c)[$ et $y \in]f(d), f(b)[$. Nous pouvons alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires trois fois, sur $[a, c]$, sur $[c, d]$ et sur $[d, b]$ et nous obtenons l'existence de $x' \in [a, c]$, $x \in [c, d]$ et $x'' \in [d, b]$ tels que $y = f(x') = f(x) = f(x'')$, ce qui contredit le fait que f est injective. □

En conclusion, si f est une fonction **continue** sur un **intervalle** $[a, b]$:

$$[\ f \text{ est une bijection de } [a,b] \text{ vers } [f(a), f(b)] \text{ ou } [f(b), f(a)]\ ] \iff [\ f \text{ est strictement monotone }]$$

4.4 Compositions de fonctions et inverses pour la composition

4.4.1 Continuité de fonctions composées continues

Théorème 4.2 *(i) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow B$ deux fonctions et $a \in A$. On suppose que A est un voisinage de a et que B est un voisinage de $g(a)$. Si g est continue en a et f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.*

(ii) Soient U et V deux ouverts dans $\mathbb{R}$. Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow V$ deux fonctions et $a \in A$. Si g est continue sur U et f est continue sur V, alors $f \circ g$ est continue sur U.

Démonstration — Il en existe plusieurs.
(i) Pour montrer (i), nous pouvons utiliser le théorème 3.2 de la section 3.5.2 et le fait qu'une fonction g définie sur un voisinage A de a ssi $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Une autre méthode est la suivante [2]. Les hypothèses sont :

— f est continue en $g(a)$, c'est à dire :
$\forall W$ voisinage de $f(g(a))$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de $g(a)$

— g est continue en a, c'est à dire :
$\forall V$ voisinage de $g(a)$, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

Donc, $\forall W$, voisinage de $f(g(a))$, $V := f^{-1}(W)$ est un voisinage de $g(a)$ et donc $g^{-1}(V) = g^{-1}\left[f^{-1}(W)\right]$ est un voisinage de a. Comme $g^{-1}\left[f^{-1}(W)\right] = (f \circ g)^{-1}(W)$, on en déduit que $f \circ g$ est continue en a.
(ii) Nous pouvons déduire (ii) directement de (i). Une autre méthode est d'utiliser que :

2. Rappelons que, si A est un voisinage de a, alors l'intersection de n'importe quel voisinage de a avec A est encore un voisinage de a

— comme V est un ouvert, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue signifie que :
$\forall \mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert.

— comme U est un ouvert, $g : U \longrightarrow V$ signifie que :
$\forall \mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}$, $g^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert.

Donc $\forall \mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert, donc $g^{-1}(\mathcal{O}) = g^{-1}\left[f^{-1}(\mathcal{U})\right] = (f \circ g)^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert. Donc $f \circ g$ est continue. $\square$