Raisonnement mathématiques II

Cours de L1 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Jeudi 18 février 2021

4.4.2 Fonction inverse ou réciproque d'une bijection

Rappelons que, si $I, J \subset \mathbb{R}$ et si une fonction $f : I \longrightarrow J$ est une *bijection* entre I et J, on définit la *fonction inverse* ou la *fonction réciproque* de f comme étant la fonction $f^{-1} : J \longrightarrow I$ telle que :

$$\forall y \in J, \quad f\left[f^{-1}(y)\right] = y$$

ou bien que :

$$\forall x \in I, \quad f^{-1}[f(x)] = x.$$

L'existence et l'unicité de la fonction f^{-1} satisfaisant ces propriétés sont garanties par le fait que $f : I \longrightarrow J$ est une bijection.

Quelques remarques et *avertissements* supplémentaires :

(i) **ne pas confondre** la *fonction inverse* d'une bijection f^{-1} avec l'*inverse d'une fonction* g qui ne s'annule pas (c'est à dire avec $x \longmapsto \frac{1}{g(x)}$) : malgré l'ambiguïté du terme *inverse*, ces deux notions *n'ont strictement rien à voir entre elles !*

(ii) lorsqu'on rédige un raisonnement faisant intervenir une bijection f et sa bijection réciproque f^{-1}, il est *fortement déconseillé* de manipuler f^{-1} comme une fonction d'une variable x si f est elle-même une fonction d'une variable x : cela constituerait le meilleur moyen de s'emmêler les pinceaux ! Il est conseillé si, par exemple, f est une fonction d'une variable x, de convenir que f^{-1} est une fonction d'une variable y.

(iii) ainsi une façon de définir f^{-1} est que, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$, dans laquelle $x \in I$ est l'*inconnue*, a une unique solution, qui est précisément $x = f^{-1}(y)$.

(iv) ne pas confondre non plus avec l'*image inverse* d'une partie $B \subset \mathbb{R}$ par une application quelconque $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, notion qui a un sens dans tous les cas ($h^{-1}(B) := \{x \in I \ ; \ h(x) \in B\}$ est un **sous-ensemble** de $I \subset \mathbb{R}$). A nouveau la *bijection réciproque* ou l'*inverse d'une bijection* $f : I \longrightarrow J$ est une fonction qui, à un *élément* $y \in J$ associe un **élement** $x = f^{-1}(y)$ de l'ensemble I.

(v) cependant, *dans le cas particulier où $f : I \longrightarrow J$ est une bijection*, les deux notions sont liées par le fait que, si $B \subset J$, alors $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) \ ; \ y \in B\}$, mais cette dernière identité n'a de sens *que si f est une bijection*.

Théorème 4.1 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ une* ***bijection continue****. Alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue.*

1. Université de Paris, Licence 1 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Démonstration — Rappelons que nous avons montré à la séance précédente (Corollaire 3.4) que toute bijection continue entre deux intervalles est *strictement monotone*. Ainsi les hypothèses du théorème entraînent que f est strictement monotone. Sans perte de généralité, nous supposerons que f est *strictement croissante* et donc que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.

Cette hypothèse entraîne que f^{-1} est *croissante* (car la contraposée de : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$ est : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $f(a) \geq f(b) \Longrightarrow a \geq b$) et donc, finalement, f^{-1} est *strictement croissante* car f^{-1} est injective.

Soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$ et montrons que f^{-1} est continue en γ, c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in J, \quad |y - \gamma| < \alpha \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(\gamma)| < \varepsilon \tag{1}$$

Comme $f : I \longrightarrow J$ est une bijection, tout élément $y \in J$ peut s'écrire $y = f(x)$, où $x \in I$ est unique. De même posons $c := f^{-1}(\gamma)$. Donc (1) se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |f(x) - f(c)| < \alpha \Longrightarrow |x - c| < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad f(c) - \alpha < f(x) < f(c) + \alpha \Longrightarrow c - \varepsilon < x < c + \varepsilon \tag{2}$$

Par ailleurs, comme f^{-1} est strictement croissante, ce qui suit est toujours vrai : pour tout $\alpha > 0$,

$$\forall x \in I, \quad f(c) - \alpha < f(x) < f(c) + \alpha \Longrightarrow f^{-1}(f(c) - \alpha) < x < f^{-1}(f(c) + \alpha)$$

Donc, pour obtenir (2), étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir $\alpha > 0$ tel que

$$c - \varepsilon \leq f^{-1}(f(c) - \alpha) \quad \text{et} \quad f^{-1}(f(c) + \alpha) \leq c + \varepsilon$$

Cela équivaut, puisque f est strictement croissante, à

$$f(c - \varepsilon) \leq f(c) - \alpha \quad \text{et} \quad f(c) + \alpha \leq f(c + \varepsilon)$$

soit

$$\alpha \leq f(c) - f(c - \varepsilon) \quad \text{et} \quad \alpha \leq f(c + \varepsilon) - f(c)$$

Or cela est toujours possible car $f(c) - f(c - \varepsilon) > 0$ et $f(c + \varepsilon) - f(c) > 0$ car f est strictement croissante.

□

Ce résultat nous permet de construire certaines fonctions comme arcsin et arccos.

Exemples — On montre que la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ (la restriction de la fonction sinus à cet intervalle) est une bijection vers son image, qui est $[-1, 1]$. Donc on peut définir sa bijection réciproque : c'est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } \sin x = y \end{array}$$

On construit de même

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } \cos x = y \end{array}$$

et (en généralisant les résultats précédents à des intervalles non bornés)

$$\begin{array}{rccc} \text{Arctg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } \text{tg}x = y \end{array}$$

5 Compacts de $\mathbb{R}$

5.1 Définition et théorème de Bolzano–Weierstrass

Définition 5.1 *Soit $K \subset \mathbb{R}$. K est un* ***compact*** *s'il satisfait la* condition de Bolzano–Weierstrass*, à savoir :*

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui prend ses valeurs dans K, il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge et dont la limite est dans K.

Les compacts admettent une caractérisation très simple grâce au résultat suivant.

Théorème 5.1 (Bolzano–Weierstrass) *Soit $K \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$; K est* ***compact*** *si et seulement si K est* ***fermé*** *et* ***borné****.*

Démonstration — (i) Nous montrons d'abord que, si K est compact, alors K est fermé et borné. Il suffit pour cela de montrer la contraposée : si K n'est pas fermé ou si K n'est pas borné, alors K n'est pas compact.

Si K n'est pas fermé, alors K n'est pas séquentiellement fermé (voir Théorème 2.1), donc il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenant ses valeurs dans K et convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui n'est pas dans K. Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers $\ell \notin K$, ce qui montre que K n'est pas compact.

De même, si K n'est pas borné, par exemple, si K n'est pas majoré, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenant ses valeurs dans K et telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers $+\infty$, ce qui montre que K n'est pas compact.

(ii) Montrons à présent la réciproque. Supposons que $K \subset \mathbb{R}$ est fermé et borné. Alors $\exists a_0, b_0$ tel que $K \subset [a_0, b_0]$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenant ses valeurs dans K, donc dans $[a_0, b_0]$. Nous noterons $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $u_n = u(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nous coupons $[a_0, b_0]$ en deux intervalles disjoints :

$$[a_0, b_0] = \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right] \cup \left]\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$$

Remarquons que

$$\mathbb{N} = u^{-1}([a_0,b_0]) = u^{-1}\left(\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]\right) \cup u^{-1}\left(\left]\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\right)$$

et que les deux ensembles à droite sont *disjoints*. Donc au moins un de ces deux ensembles est infini. Si ce n'était pas le cas, $\mathbb{N}$ serait la réunion de deux ensembles finis et donc serait fini, ce qui est contradictoire. D'où l'alternative suivante :

— Si $u^{-1}\left(\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]\right)$ est infini, nous notons $a_1 := a_0$ et $b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$. Alors

$$\{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \in [a_1, b_1]\} = u^{-1}\left([a_1, b_1]\right) = u^{-1}\left(\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]\right)$$

est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

— Sinon $u^{-1}\left(\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]\right)$ est fini et alors $u^{-1}\left(\left]\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\right)$ est infini et donc, *a fortiori*, $u^{-1}\left(\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\right)$ est infini. Nous notons $a_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 := b_0$. Alors

$$\{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \in [a_1, b_1]\} = u^{-1}\left([a_1, b_1]\right) = u^{-1}\left(\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\right)$$

est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Dans les deux cas, $u^{-1}\left([a_1, b_1]\right)$ est une partie infinie donc *a fortiori* non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément. Nous notons

$$\varphi(0) := \min\{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \in [a_1, b_1]\}$$

si bien que $u_{\varphi(0)} \in [a_1, b_1]$.

Nous réitérons ce raisonnement en coupant à nouveau $[a_1, b_1]$ en deux intervalles disjoints :

$$[a_1, b_1] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \cup \left]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

À nouveau

$$u^{-1}([a_1, b_1]) = u^{-1}\left(\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]\right) \cup u^{-1}\left(\left]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]\right)$$

et les deux ensembles à droite sont *disjoints*. Donc, comme $u^{-1}([a_1, b_1])$ est infini, au moins un des deux ensembles à droite est infini. D'où l'alternative suivante :

— Si $u^{-1}\left(\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]\right)$ est infini, nous notons $a_2 := a_1$ et $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$. Alors $u^{-1}\left([a_2, b_2]\right)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

— Sinon $u^{-1}\left(\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]\right)$ est fini et alors $u^{-1}\left(\left]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]\right)$ est infini et donc, *a fortiori*, $u^{-1}\left(\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]\right)$ est infini. Nous notons $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 := b_1$. Alors $u^{-1}\left([a_2, b_2]\right)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Dans les deux cas, $u^{-1}\left([a_2, b_2]\right) \cap]\varphi(0), \infty[$ est une partie infinie donc *a fortiori* non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément. Nous notons

$$\varphi(1) := \min\{n \in \mathbb{N}; \; \varphi(0) < n, u_n \in [a_2, b_2]\}$$

si bien que $u_{\varphi(1)} \in [a_2, b_2]$ et $\varphi(1) > \varphi(0)$.

Nous répétons indéfiniment ces arguments. Nous construisons ainsi trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que [2] :

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, ce qui entraîne par une récurrence immédiate que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 2^{-n}(b-a)$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$.

(i) et (ii) entraînent que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes et donc qu'elles convergent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (ii) nous permet d'appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $u_{\varphi(n)}$ converge également vers ℓ.

Nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse que K est fermé. C'est le moment : comme la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et prend ses valeurs dans K et que K est fermé, $\ell \in K$. $\square$

5.2 Conséquences du théorème de Bolzano–Weierstrass

Théorème 5.2 *L'image d'un compact de $\mathbb{R}$ par une application continue est un compact.*

Démonstration — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $K \subset I$ un compact. Nous supposons que $K \neq \emptyset$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $f(K)$. Alors, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in K$, $v_n = f(x)$, nous pouvons construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans K telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = v_n$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur $\ell \in K$. Comme f est continue, cela implique que $\left(f(u_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$. Cela signifie que $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) \in f(K)$. $\square$

Théorème 5.3 *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact non vide et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et* atteint ses bornes*, ce qui signifie que :*

(i) $\exists \alpha \in K,\ f(\alpha) = \sup f(K) = \sup\{f(x)\ ;\ x \in K\}$;

(ii) $\exists \beta \in K,\ f(\beta) = \inf f(K) = \inf\{f(x)\ ;\ x \in K\}$.

Démonstration — D'après le théorème précédent, $f(K)$ est compact, donc borné. Comme K est supposé non vide, $f(K)$ est aussi non vide, donc $f(K)$ admet une borne supérieure. Soit $M := \sup f(K)$. Alors il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $f(K)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = M$. Comme cette suite prend ses valeurs dans $f(K)$, il existe une suite

---

2. L'existence de ces trois suites et les propriétés (i), (ii) et (iii) se démontrent en montrant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{c} \exists\, (a_0, a_1, \cdots, a_n), (b_0, b_1, \cdots, b_n), (\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(n)),\ \text{suites finies réelles telles que} \\ \varphi(n) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq\ u_{\varphi(n)}\ \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0, \\ b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0) \quad \text{et} \quad u^{-1}([a_n, b_n])\ \text{est infini} \\ \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n) \end{array} \right.$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans K telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = v_n$. Comme K est compact, nous pouvons extraite une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur $\alpha \in K$. Donc

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}\right) \underbrace{=}_{f \text{ continue}} \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = M.$$

Cela montre (i). La preuve de (ii) est identique. □

5.3 Continuité uniforme

Cette section est hors programme.

Définition 5.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est* ***uniformément continue*** *sur I si*

$$\forall\varepsilon >, \exists\alpha > 0, \forall a \in I, \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3}$$

Remarques — (i) La différence avec « f est continue sur I » :

$$\forall a \in I, \forall\varepsilon >, \exists\alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

est subtile : tout est dans l'ordre des quantificateurs et cela change le résultat. En général une fonction *uniformément continue* est toujours continue, mais la réciproque n'est pas vraie (par exemple la fonction $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ est continue mais n'est pas uniformément continue).
(ii) En réalité l'ordre des quantificateurs (3) fait que les rôles de x et a y sont totalement symétriques, ce qui apparaît de façon plus évidente en formulant la définition d'une fonction uniformément sous la forme :

$$\forall\varepsilon >, \exists\alpha > 0, \forall x_1, x_2 \in I, \quad |x_2 - x_1| < \alpha \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Théorème 5.4 (Heine) *Toute fonction continue et définie sur un compact est uniformément continue.*

Démonstration — Elle peut se faire en exercice, en raisonnant par l'absurde.