CALIBRATIONS, STRUCTURES DE CALABI-YAU ET STRUCTURES DE MONGE-AMPÈRE

BERTRAND BANOS

1. Introduction

Les sous-variétés Spéciales Lagrangiennes (SLAG) ont été introduites dans les années 80 par Harvey et Lawson dans leur célèbre article *Calibrated Geometries* ([HL]). Ils recherchaient initialement des exemples de sous-variété minimales et ont défini ses sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ (et plus généralement d'une variété de Calabi-Yau) comme l'analogue symplectique des sous-variétés complexes en utilisant la théorie des calibrations.

Nous avons pu assister ces dernières années à un net regain d'intérêt pour ces sous-variétés spéciales lagrangiennes. Elles ont par exemple des propriétés remarquable en théorie des déformations ([Hi],[M]). Cette théorie des déformations des SLAG semble jouer un rôle prépondérant en "symétrie miroir". Strominger, Yau et Zaslow ont notamment propsé la construction de "partenaires miroir" à partir de fibrations toriques spéciales lagrangiennes ([SYZ]).

L'ensemble des SLAG d'une variété de Calabi-Yau est exactement l'ensemble des solutions d'une équation différentielle de type Monge-Ampère. Cette équation s'écrit par exemple dans le cas de $\mathbb{C}^3$

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0.$$

Nous montrerons dans cet exposé que cette équation contient en fait toutes les informations sur la structure de Calabi-Yau de $\mathbb{C}^3$. Nous montrerons aussi comment construire des structures géométriques similaires aux structures de Calabi-Yau à partir des deux autres équations de Monge-Ampère "non-dégénérées" en trois variables

$$\begin{cases} \mathrm{hess}(f) = 1 \\ \Box f + \mathrm{hess}(f) = 0 \end{cases}$$

Dans une première partie nous exposons brièvement la théorie des calibrations développée par Harvey et Lawson et nous étudions quelques exemples, notamment la calibration spéciale lagrangienne sur $\mathbb{C}^n$. Nous montrons ensuite comment la notion de structure de Calabi-Yau sur une variété généralise la calibration spéciale lagrangienne sur $\mathbb{C}^n$. Nous donnons quelques exemples de telles variétés et de sous-variétés spéciales lagrangiennes. Ces deux parties sont essentiellement basées sur les cours donnés par M. Audin ([A]) et Joyce ([J]). Dans une troisième partie nous généralisons cette notion de structure de Calabi-Yau et introduisons la notion de structure de Monge-Ampère. Nous définissons en particulier les structures de Calabi-Yau elliptiques et hyperboliques en dimension réelle 6.

2. Calibrations

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée de dimension n. On note $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles sur M.

DEFINITION 1. *Une p-calibration est une p-forme $\phi \in \Omega^p(M)$ telle que*

(1) $d\phi = 0$

(2) pour tout $x \in M$ *et pour toute famille orthonormée* $\{X_1, \ldots, X_p\}$ *de* T_xM,

$$\phi_x(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) \leq 1.$$

Une sous-variété ϕ*-calibrée est une sous-variété orientée* $L \subset M$ *de dimension* p *telle que pour tout* $x \in L$ *et toute base orthonormée directe* $\{X_1, \ldots, X_p\}$ *de* T_xL *la relation suivante est vérifiée :*

$$\phi_x(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) = 1.$$

EXEMPLE 2. *Soit* (M, I, g, Ω) *une variété de Kähler, i.e.*

(1) la structure complexe I *est une isométrie :* $g(I., I.) = g$,

(2) la forme de Kähler $\Omega = g(I., .)$ *est fermée :* $d\Omega = 0$.

Ω *est alors une* 2*-calibration sur* M*. En effet soit* $\{X, Y\}$ *une famille orthonormée de* T_xM*. Ecrivons* $IX = aX + bY + Z$ *avec* $Z \in \{X, Y\}^{\perp}$*. Puisque* I *est une isométrie, il vient*

$$1 = g(X, X) = g(IX, IX) = a^2 + b^2 + \|Z\|^2.$$

Donc $\Omega(X, Y) = g(IX, Y) = b \leq 1$*. De plus* $\Omega(X, Y) = 1$ *si et seulement si* $a = \|Z\|^2 = 0$ *et* $b = 1$*, c'est à dire* $IX = Y$*.* Ω *est une* 2*-calibration et les sous-variétés* Ω*-calibrées de* M *sont les courbes complexes de* M*.*

Plus généralement $\frac{\Omega^p}{p!}$ *est une* $2p$*-calibration dont les sous-variétés calibrées sont les sous-variétés complexes de dimension complexe* p*.*

Le théorème suivant explique en quel sens les sous-variété calibrées sont minimales.

THEOREME 3 (Harvey-Lawson)**.** *Soit* ϕ *une calibration sur* M *et* $N \subset M$ *une sous variété* ϕ*-calibrée.* N *est alors de volume minimal dans sa classe d'homologie.*

Ce théorème est en fait une application immédiate du théorème de Stockes. En effet soit N' une sous-variété M appartenant à la classe d'homologie de N : $[N'] = [N] \in H_p(M, \mathbb{R})$. Puisque ϕ est fermée on a

$$\int_{N'} \phi = \int_N \phi.$$

Et donc :

$$Vol(N') = \int_{N'} vol(N') \geq \int_{N'} \phi = \int_N \phi = \int_N vol(N) = Vol(N).$$

Le fait que les sous-variétés complexes d'une variété complexes sont minimales était déjà bien connu (théorème de Federer). Mais Harvey et Lawson ont introduit une autre calibration, la calibration spéciale lagrangienne, dont les sous-variétés calibrées sont en un certain sens l'équivalent symplectique des sous-variétés complexes.

EXEMPLE 4. *La calibration spéciale lagrangienne sur* $\mathbb{C}^n$*.*

Soit $\alpha = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ *la forme volume holomorphe sur* $\mathbb{C}^n$*.* $Re(\alpha)$ *est une* n*-calibration sur* $\mathbb{C}^n$ *et les sous-variétés* $Re(\alpha)$*-calibrées sont dites spéciales lagrangiennes (SLAG).* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ *est l'exemple "canonique" de sous-variété SLAG de* $\mathbb{C}^n$*. Dans le cas* $n = 2$*, la correspondance entre sous-variétés SLAG et sous-variétés complexes apparait clairement lorsque l'on utilise la structure quaternionique de* $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ *: les sous-variétés SLAG de* $\mathbb{H}$ *pour la structure complexe* I *sont exactement les courbes complexes de* $\mathbb{H}$ *pour la structure complexe* J*.*

Le terme SLAG provient du fait que les sous-variétés calibrées par $Re(\alpha)$ *sont des sous-variétés lagrangiennes de* $(\mathbb{C}^n, \Omega = (\frac{i}{2})^n \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j})$ *particulières : une* *sous-variété réelle $L \subset \mathbb{C}^n$ de dimension n est à choix d'orientation près spéciale lagrangienne si et seulement si*

$$\begin{cases} \Omega|_L = 0 \\ Im(\alpha)|_L = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Cette condition (1) *dit que les sous-variétés SLAG sont les solutions "généralisées" d'une certaine équation différentielle. Ainsi par exemple pour $n = 3$, si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, le graphe $graph(\nabla f) \subset \mathbb{C}^3$ est une sous-variété SLAG si et seulement si f est solution de l'équation différentielle*

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0. \tag{2}$$

Remarquons qu'il existe d'autres exemples de calibrations. Les plus connues sont associées à la géométrie des octonions : la calibration associative et la calibration coassociative sur $\mathbb{R}^7 = Im(\mathbb{O})$ et la calibration de Cayley sur $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$.

3. Structures de Calabi-Yau

Les sous-variétés SLAG de $\mathbb{C}^n$ ne peuvent être compactes. On introduit alors la notion de variétés de Calabi-Yau qui sont une généralisation de $(\mathbb{C}^n, g, I, \Omega, \alpha)$. Lorsque ces variétés sont compactes, la notion de sous-variété SLAG compacte prend alors un sens.

DEFINITION 5. *Une variété de Calabi-Yau est une variété de Kähler (M, g, I, Ω) munie d'une forme volume holomorphe $\alpha \in \Omega^{n,0}(M)$ telle que*

$$\frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}}{\Omega^n} = constant,$$

n étant la dimension complexe de M.

$Re(\alpha)$ est, à renormalisation près, une calibration et les sous-variétés $Re(\alpha)$-calibrées sont dites SLAG.

Il existe relativement peu d'exemples de variétés de Calabi-Yau connus bien qu'il semble en exister beaucoup (c.f. théorème de Yau ci-dessous). Nous pouvons citer par exemple :

(1) $\mathbb{C}^n$
(2) $Q_n = \{z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^n$
(3) les hypersurfaces de $\mathbb{CP}^{n+1}$ de degré $n + 2$. Par exemple la quintic de Fermat $\{z_0^5 + \ldots z_4^5 = 0\} \subset \mathbb{CP}^4$.

L'exemple de Q_n, dû à Stenzel, est relativement simple. Ainsi pour $n = 2$, la structure complexe sur Q_2 est la structure complexe héritée de $\mathbb{C}^2$, la forme volume holomorphe est définie par

$$\alpha_z(U, V) = det_{\mathbb{C}}(z, U, V),$$

et la forme de Kähler s'écrit $\Omega = i\partial\overline{\partial}(f \circ h)$ où $f(h) = \sqrt{1 + h}$ et h est la restriction à Q_2 de $\|z\|^2$.

Il n'existe pas d'exemples explicites de telles structures de Calabi-Yau sur des variétés compactes. Les exemples connus proviennent du théorème d'existence de Yau :

THEOREME 6 (Yau)**.** *Soit M une variété complexe projective de dimension complexe n munie d'une forme volume holomorhpe $\alpha \in H^{n,0}(M)$ et telle que $H^{p,0}(M) = 0$ pour tout $p = 1, \ldots, p - 1$. Pour toute forme de Kähler Ω sur M, il existe une unique forme de Kähler $\tilde{\Omega}$ telle que $[\tilde{\Omega}] = [\Omega] \in H^2_{DR}(M)$ et telle que $(M, I, \tilde{\Omega}, \alpha)$ soit une variété de Calabi-Yau.*

Les exemples de sous-variétés SLAG sont tout aussi peu nombreux. Ils sont essentiellement de deux types auxquel on peut rajouter quelques exemples explicites dans le cas non compact :

(1) si M est une variété de Calabi-Yau munie d'une structure réelle S ($S : M \to M$ est une involution antiholomorphe), alors lorsqu'il est non vide l'ensemble des points fixes de S est une sous-variété SLAG de M,

(2) si (M, I, J, K) est une variété hyperkählérienne, les sous-variétés complexes pour la structures complexes J sont SLAG pour la structure complexe I.

REMARQUE 7. *Les variétés de Calabi-Yau sont des variétés d'holonomie $SU(n)$. Pour les variétés d'holonomie exceptionnelle G_2 ou $Spin(7)$ on a de même une généralisation des calibrations associative, coassociative ou de Cayley.*

4. Structures de Monge-Ampère

Les sous-variétés spéciales lagrangiennes de $\mathbb{C}^3$ sont exactement les solutions de l'équation différentielle

$$\Delta(f) - \text{hess}(f) = 0.$$

La structure de Calabi-Yau de $\mathbb{C}^3$ doit être alors entièrement "encodée" dans cette équation. Nous nous proposons de montrer dans cette partie de montrer comment on peut construire une structure de Calabi-Yau à partir d'une telle équation et comment on peut construire des structures très similaires aux structures de Calabi-Yau à partir d'équations différentielles qui ont exactement la même "non-linéarité".

Une équation différentielle en n variables d'ordre n qui a "la non-linéarité du déterminant" est appelée équation de Monge-Ampère. Une telle équation s'écrit par exemple en deux variables

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2} + C\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} + D(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2})^2) + E = 0,$$

les coefficients A, B, C, D et E étant des fonctions lisses de $(q, f, \frac{\partial f}{\partial q})$. Lorsque ces coefficients ne dépendent que de $(q, \frac{\partial f}{\partial q})$ on parle d'équation de Monge-Ampère symplectique (EMAS). Ce sont ces équations qui nous intéressent ici.

Lychagin et Roubtsov ont développé dans les années 80 une description géométrique de ces équations différentielles à partir des formes différentielles sur $T^*\mathbb{R}^n$ ([L],[LR1], [LR2], [LR3]). Plus précisément, à toute forme différentielle $\omega \in \Omega^n(T^*\mathbb{R}^n)$, ils associent l'équation de Monge-Ampère

$$\Delta_\omega = 0,$$

où $\Delta_\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta_\omega(f) = (df)^*(\omega).$$

Ainsi par exemple, si on note (q, p) le système de coordonnées canonique sur $T^*\mathbb{R}^n$, à la forme $\omega = dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n - dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n$ est associée l'équation

$$\text{hess}(f) = 1.$$

Lychagin et Roubtsov ont en fait montré qu'il y a une correspondance binuivoque entre les EMAS sur $\mathbb{R}^n$ et les classes conformes de formes effectives, une forme $\omega \in \Omega^n(T^*\mathbb{R}^n)$ étant dite effective lorsqu'elle vérifie $\omega \wedge \Omega_0 = 0$ (Ω_0 est la forme symplectique canonique sur $T^*\mathbb{R}^n$).

Une telle approche des EMAS nous permet de proposer une définition naturelle de la notion "d'équation différentielle globale" sur une variété dans le cas particulier des EMAS :

DEFINITION 8. *Une structure de Monge-Ampère sur une variété lisse M de dimension $2n$ est la donnée d'un couple (Ω,ω), Ω étant une forme symplectique sur M et $\omega \in \Omega^n(M)$ étant une n-forme différentielle vérifiant*

$$\omega \wedge \Omega = 0.$$

Une solution généralisée de l'équation associée à une telle structure est une sous-variété lagrangienne L de (M,Ω) "calibrée" par la forme ω :

$$\omega|_L = 0.$$

Remarquons que lorsque que l'on identifie localement (M,Ω) à $(T^*\mathbb{R}^n,\Omega_0)$, une sous-variété "calibrée" par le couple (Ω,ω) qui se projette bien sur la base $\mathbb{R}^n$ est localement le graphe d'une section $df : \mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ avec f solution de l'EMAS $\Delta_\omega = 0$. D'où le terme de solution généralisée.

Les travaux récents de Hitchin ([Hi]) sur la géométrie des 3-formes extérieures en dimension 6 combinés avec les travaux de Lychagin et Roubtsov sur les formes effectives permettent de construire de jolies structures géométriques à partir d'un tel couple $(\Omega,\omega) \in \Omega^2(M) \times \Omega^n(M)$. Hitchin a défini un invariant $\lambda : \Lambda^3(\mathbb{R}^6) \to \mathbb{R}$, que nous appellerons pfaffien de Hitchin, qui permet de définir la notion de 3-forme non dégénérée. En effet l'action du groupe $GL(6)$ sur $\Lambda^3(\mathbb{R}^6)$ a deux orbites ouvertes séparées par l'hypersurface $\lambda = 0$. Il a caractérisé ces deux orbites de la façon suivante :

PROPOSITION 9. *Soit Ω_0 la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^6 = T^*\mathbb{R}^3$ et $\theta = -\frac{\Omega_0^3}{6}$. Soit $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^6)$.*

(1) si $\lambda(\omega) > 0$, ω se décompose de manière unique

$$\omega = \alpha + \beta,$$

α et β étant des formes décomposables réelles vérifiant

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\theta} = \sqrt{\lambda(\omega)}.$$

(2) si $\lambda(\omega) < 0$, ω se décompose de manière unique

$$\omega = \alpha + \overline{\alpha},$$

α étant une forme complexe décomposable vérifiant

$$\frac{\alpha\wedge\overline{\alpha}}{\theta} = \sqrt{-\lambda(\omega)}.$$

Ces formes non dégénérées, lorsque l'on se place du point de vue des opérateurs de Monge-Ampère caractérisent en fait les équation non-linéarisables (une EMAS est linéarisable si on peut par un changement de variables symplectique la transformer en une EMAS linéaire) :

PROPOSITION 10. *Si $\lambda(\omega) \neq 0$, l'équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ associée à une structure de Monge-Ampère (Ω,ω) sur une variété de dimension 6 est non-linéarisable.*

Lychagin et Roubsov ont associé à chaque forme effective $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^6)$ une forme symétrique $q_\omega \in S^2(\mathbb{R}^6)$ invariante par l'action du groupe symplectique ($q_{F^*\omega} = Fq_\omega F^t$ pour $F \in Sp(6)$) qui est non dégénérée si et seulement si $\lambda(\omega) \neq 0$ et qui est compatible avec Ω_0 :

(1) si $\lambda(\omega) = 1$ alors $q_\omega(.,.) = \Omega_0, (J_\omega .,.)$ avec $J_\omega^2 = Id$

(2) si $\lambda(\omega) = -1$ alors $q_\omega(.,.) = \Omega_0, (J_\omega .,.)$ avec $J_\omega^2 = -Id$

Remarquons que cette structure presque produit ou presque complexe J_ω a été définie par Hitchin pour toute 3-forme non dégénérée.

Remarquons aussi que lorsque $\lambda(\omega) > 0$ alors q_ω est de signature $(3,3)$ et lorsque $\lambda(\omega) < 0$ alors q_ω est de signature $(6,0)$ ou $(4,2)$.

Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

(1) Structure de Calabi-Yau elliptique

DEFINITION 11. *Une structure presque (pseudo) Calabi-Yau elliptique sur une variété réelle X^6 est la donnée*

(a) d'une structure presque (pseudo) Kähler (q, I, Ω) sur X : Ω est une 2-forme non dégénérée et fermée, I est une structure presque complexe telle $I^*\Omega = \Omega$ et q est la métrique (éventuellement indéfinie) $q = \Omega(I.,.)$;

(b) d'une forme différentielle complexe α de type $(3,0)$ sur X telle que

$$\Omega^3 = -\frac{3i}{4}\alpha \wedge \overline{\alpha}.$$

Une structure presque (pseudo) Calabi-Yau elliptique (q, I, Ω, α) est une structure (pseudo) Calabi-Yau elliptique si la structure presque complexe I est intégrable et si la forme α est holomorphe pour cette structure complexe.

Il y a une correspondance biunivoque entre structures presque (pseudo) Calabi-Yau elliptiques et classes conformes de structures de Monge-Ampère elliptiques. Soit en effet (Ω, ω_0) une structure de Monge-Ampère elliptique (i.e. $\lambda(\omega) > 0$) sur une variété X de dimension 6. Soit ω la forme normalisée

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega_0)|}}.$$

La structure presque (pseudo) Calabi-Yau elliptique associée à la classe conforme (Ω, ω_0) est $(q_\omega, J_\omega, \Omega, \alpha)$ avec

$$\omega = \alpha + \overline{\alpha}$$

Réciproquement à une structure presque Calabi-Yau elliptique (q, I, Ω, α) est associée la structure de Monge-Ampère elliptique $(\Omega, Re(\alpha)))$.

EXEMPLE 12. *La structure géométrique sur $T^*\mathbb{R}^3$ associée à l'équation spéciale lagrangienne*

$$\mathrm{hess}(f) - \Delta f = 0$$

est la structure de Calabi-Yau classique (q, I, Ω, α) avec :

$$\begin{cases} q = \sum_{j=1}^{3} dx_j.dx_j + dy_j.dy_j \\ I = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \otimes dx_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dy_j \\ \Omega = \sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \end{cases}$$

De manière similaire, la structure géométrique associée à l'équation pseudo spéciale lagrangienne

$$\mathrm{hess}(f) + \Box f = 0$$

est la structure pseudo Calabi-Yau $(q_-, I_-, \Omega, \alpha)$ *avec :*

$$\begin{cases} q_- = dx_1.dx_1 - dx_2.dx_2 + dx_3.dx_3 + dy_1.dy_1 - dy_2.dy_2 + dx_3.dx_3 \\ I_- = -\frac{\partial}{\partial y_1} \otimes dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes dy_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \otimes dx_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \otimes dy_2 - \frac{\partial}{\partial y_3} \otimes dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \otimes dy_3 \\ \Omega = \sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \end{cases}$$

Remarquons que ces deux équation sont les uniques exemples d'équation de Monge-Ampère elliptiques à coefficients constants en dimension 3 *(à changement de variable symplectique près).*

(2) Structure de Calabi-Yau hyperbolique

DEFINITION 13. *Une structure presque pseudo Calabi-Yau hyperbolique sur une variété réelle de dimension* 6 *est la donnée*

(a) d'une structure pseudo Kähler hyperbolique (q, S, Ω) *:* Ω *est une* 2*-forme non dégénérée et fermée,* S *est une structure presque produit* ($S^2 = Id$) *telle que* $S^*\Omega = -\Omega$ *et* $q = \Omega(S.,.)$ *est une métrique de signature* $(3, 3)$ *;*

(b) de deux formes décomposables α *et* β *dont les distributions associées sont les distributions des vecteurs propres de* S *et telles que*

$$\alpha \wedge \beta = -\frac{\Omega^3}{6}$$

Une structure presque pseudo Calabi-Yau hyperbolique est une structure pseudo Calabi-Yau hyperbolique si S *est intégrable et si* α *et* β *sont fermées.*

REMARQUE 14. *Ces variétés sont l'analogue des "variétés de Monge-Ampère" au sens de Kontsevich et Soibelman (*[KS]*). Une variété de Monge-Ampère est pour eux une variété riemannienne affine* (M, g) *telle que localement la métrique s'écrit*

$$g = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} dx_i.dx_j,$$

où K *est une fonction lisse vérifiant*

$$det(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}) = constant.$$

Dans le cas des variétés de Calabi-Yau hyperboliques , on a un tel potentiel K *et la métrique s'écrit*

$$g = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial y_j} dx_i.dy_j.$$

avec

$$det(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial y_j}) = constant.$$

Soit (Ω, ω_0) une structure de Monge-Ampère hyperbolique sur une variété X de dimension 6. Soit ω la forme normalisée

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt[4]{\lambda(\omega_0)}}.$$

La structure presque Calabi-Yau hyperbolique associée à la classe conforme (Ω, ω_0) est $(q_\omega, K_\omega, \Omega, \alpha, \beta)$ avec

$$\omega = \alpha + \beta$$

Ici encore on a une correspondance biunivoque entre structures presque Calabi-Yau hyperboliques et structures de Monge-Ampère hyperbolique en dimension 6.

EXEMPLE 15. *La structure (pseudo) Calabi-Yau réelle associée à l'équation de Monge-Ampère classique*

$$\mathrm{hess}(f) = 1$$

est la structure $(q, S, \Omega, \alpha, \beta)$ *avec :*

$$\begin{cases} q = \sum_{j=1}^{3} dx_j.dy_j \\ S = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx_j - \frac{\partial}{\partial y_j} \otimes dy_j \\ \Omega = \sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \ \beta = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \end{cases}$$

Remarquons que cette équation est l'unique exemple déquation de Monge-Ampère hyperbolique à coefficients constants en dimension 3 *(à changement de variable symplectique près).*

REMARQUE 16. *On peut démontrer que la structure de Calabi-Yau associée à une structure de Monge-Ampère* (Ω, ω) *est intégrable au sens défini plus haut si et seulement si*

$$d\left(\frac{\omega}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}}\right) = d\left(\frac{\hat{\omega}}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}}\right),$$

où

$$\begin{cases} \hat{\omega} = \alpha - \beta \ \textit{si} \ \omega = \alpha + \beta \\ \hat{\omega} = i(\overline{\alpha} - \alpha) \ \textit{si} \ \omega = \alpha + \overline{\alpha} \end{cases}$$

De plus cette structure est localement une des structures citées en exemple si et seulement si la métrique est plate.

5. Conclusion

Une version "populaire" de la théorie des cordes fait l'hypothèse que nous vivons dans un espace de dimension 10 qui s'écrit localement $\mathbb{R}^4 \times X^6$, X^6 étant une variété de Calabi-Yau compacte de dimension réelle 6. La conjecture miroir dit que la structure complexe et la structure symplectique de X sont essentiellement équivalentes. Plus précisément il doit exister une autre variété de Calabi-Yau de même dimension $\hat{X}$ (le partenaire miroir) dont la structure complexe "est" la structure symplectique de X et réciproquement. Strominger, Yau et Zaslow ont montré que l'on peut parfois construire un tel partenaire si l'on fait l'hypthèse de l'existence d'une fibration $X \to B$ au dessus d'une base compacte dont les fibres sont des tores lagrangiens spéciaux.

Les variétés Calabi-Yau hyperboliques sont en un certain sens l'analogue réel des variétés Calabi-Yau classiques. Mais en quel sens ? Est-ce une analogie formelle ou est-ce que cette structure est aussi riche que son équivalent complexe ? Un des rares exemples connus de l'auteur d'une telle structure est $S^3 \times S^3$ (parce que le fibré tangent de S^3 est trivial !). Cet exemple est très simple mais a néanmoins son analogue complexe : $Q_3 = T^*S^3$. Cet exemple peut nous laisser supposer que l'on peut peut-être construire des "partenaires miroir" dans le cas réel (en "échangeant" structure symplectique et structure produit) de façon plus simple. Mais cette procédure aura t'elle un signification physique ?

Références

[A] Audin (M.) : *Lagrangian Submanifold* http ://irmasrv1.u-strasbg.fr/ maudin/publications.html

[Hi] Hitchin (N.) : *The geometry of three-forms in six and seven dimensions*, Journal of Differential Geometry, 56, 2001

[HL] Harvey (R.), Lawson (H.B.) : *Calibrated geometries*, Acta. Math. 148, p. 47-157

[J] Joyce (D.) : *Lectures on Calabi-Yau and special lagrangian geometry*, arXiv :math.DG/0108088 v2

[KS] Kontsevich (M.), Soibelman (Y.) : *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, Proceedings of KIAS conference in Symplectic geometry and Strings, 2001

[L] Lychagin (V.V.) : *Non linear differential equations and contact geometry*, Uspèkhi Mat. Nauk, vol 34, 1979, p.137-165 (in Russian) ; english transl. in Russian Math. Surveys, vol 34, 1979

[LR1] Lychagin (V.V.), Roubtsov (V.) : *On Sophus Lie Theorems for Monge-Ampère equations*, Doklady Bielorrussian Academy of Science, vol. 27, 5, 1983, p. 396-398 (in Russian)

[LR2] Lychagin (V.V.), Roubtsov (V.N.) : *Local classifications of Monge-Ampère equations*, Soviet. Math. Dokl, vol 28,2, 1983, p 396-398

[LR3] Lychagin (V.V.), Roubtsov (V.N.) and Chekalov (I.V.) : *A classification of Monge-Ampère equations*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup, 4 ème série, t.26, 1993, p.281-308

[M] Mclean (R.C) : *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. 6, 1998, 4 p. 705-747

[St] Stenzel (M.) *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta. Math. 80, 1993, p. 151-163

[SYZ] Strominger (A.), Yau (S.T) et Zaslow (E.) : *Mirror symmetrie is T-duality*, Nuclear Phys., B 479, 1996, p. 243-259

Bertrand Banos, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers, France

E-mail address: `bertrand.banos@univ-angers.fr`