Dualités, supersymétries et systèmes complètement intégrables*

Frédéric HÉLEIN †

le 15 décembre 2003

Introduction

Les ondes solitaires sont observées dans la nature depuis longtemps : la première description précise (du moins d'après nos connaissances) remonte à 1844, lorsque l'ingénieur écossais J. Scott Russel assista par hasard à la formation de ce phénomène et à sa propagation à la surface d'un canal. Ces ondes, appelées plus tard *solitons*, ont reçu une première interprétation théorique dès la fin du dix-neuvième siècle grâce à l'équation de Korteweg–de Vries[1] (KdV, [7]) : $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$. Dans cette équation l'existence de l'onde solitaire est le résultat d'une compétition entre les effets dispersifs produits par la partie linéaire de l'équation et un effet « focalisant » dû à la non linéarité.

Depuis les physiciens ont introduit une multitude de modèles ayant des solutions similaires, de type « soliton ». Toutefois nous pouvons distinguer parmi tous ces modèles une classe particulière d'équations aux dérivées partielles, dont l'équation de KdV fait partie, et qui possèdent une qualité rare : celles des « systèmes complètement intégrables ». Cette appellation recouvre la conjonction d'une série de propriétés tout à fait exceptionnelles : une structure hamiltonienne, une infinité de quantités conservées (*intégrables premières*), de symétries, etc. qui ont été comprises petit à petit grâce aux efforts

---

*texte à paraître dans la collection *Philosophia Naturalis et Geometricalis*, éditions **Peter Lang**

†Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Université Paris 7– Denis Diderot, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

1 découverte en réalité par Boussinesq

de nombreux mathématiciens depuis une cinquantaine d'années[2](suite à une expérience numérique célèbre de Fermi, Pasta et Ulam). En résumé il existe une transformation non linéaire de la fonction inconnue u en des données qui sont contraintes par des équations différentielles très simples. Ce schéma n'est pas sans rappeler la transformation de Fourier qui, en décomposant un signal en une somme infinie de modes de vibration élémentaires, convertit une équation aux dérivées partielles en une série infinie d'équations très simples. Ici la transformation, souvent appelée « transformation de diffusion (scattering) inverse », est en apparence beaucoup plus complexe. Toutefois, grâce notament aux travaux de M. Sato, A. Pressley et G. Segal, il est possible d'en donner une description relativement simple, comme une transformation géométrique ou algébrique élémentaire, à condition de se placer dans un cadre adéquat : la grassmannienne des sous-espaces de « dimension moitié » dans un espace de Hilbert (Sato), ou bien dans un groupe de lacets (ensemble des applications du cercle vers un groupe de Lie, cf. [15]).

L'étude des solitons constitue une importante source d'inspiration pour les physiciens théoriciens qui cherchent à élucider la structure d'une particule élémentaire. Cette question a commencé à devenir pertinente dès le dix-neuvième siècle, époque durant laquelle l'hypothèse que la matière est constituée d'atomes fut considérée de plus en plus sérieusement (et avant que cette idée ne fut imposée par les travaux de J. Perrin vers 1900). Très tôt il est apparu que l'idée naïve qu'une particule puisse être concentrée en un point devait être abandonnée, ne serait-ce que parce qu'alors, l'énergie contenue dans le champ électrique au voisinage d'un électron devrait être infinie. Le procédé le plus simple pour échapper à cet infini est d'assimiler l'électron à une sphère, hypothèse utilisée notament par H. Poincaré. Bien évidemment une telle représentation semble d'avantage être une hypothèse de travail plutôt qu'un véritable modèle[3]. Ainsi d'autres tentatives de modélisation de la structure de l'atome ou de l'électron furent proposées à l'époque en imaginant une sorte de tourbillon ou de singularité d'un champ physique fondamental (cf. la théorie de Lord Kelvin, faisant appel aux nœuds, ou la théorie de G. Mie). Au sein de cette démarche l'équation de KdV apparaît comme un

[2]cependant au XIXème siècle les géomètres différentiels (O. Bonnet, G. Lamé, A. Enneper, A.V. Bäcklund, L. Bianchi, G. Darboux, S. Lie, E. Goursat, J. Clairin, etc.) avaient découvert un très grand nombre de propriétés miraculeuses satisfaites notament par les surfaces à courbure moyenne constante ou à courbure de Gauss constante. Longtemps oubliées, certaines de ces propriétés sont aujourd'hui revisitées et s'interprètent comme des manifestations du fait que ces problèmes géométriques sont des systèmes complètement intégrables.

[3]ne serait-ce que, comme Poincaré l'a montré, une telle hypothèse conduirait à des contradictions avec la relativité

jouet particulièrement attractif car, malgré sa relative simplicité, elle cache un mécanisme qui autorise l'existence des solitons, ces solutions concentrées dans l'espace et caractérisées par des grandeurs facilement identifiables, que l'on assimile volontiers à une masse (énergie) ou à une impulsion.

Aujourd'hui la question de la structure des constituants élémentaires de la matière ne peut plus être abordée sans tenir compte des bouleversements apportés par la mécanique quantique. Ainsi l'énigme est devenu encore plus profonde, puisque le principe d'incertitude d'Heisenberg interdit de déterminer simultanément la vitesse et la position d'une particule. Mais en contrepartie la physique quantique a apporté des idées radicalement nouvelles. Celles-ci sont issues de l'œuvre de M. Planck et A. Einstein qui, pour comprendre la thermodynamique de la lumière, ont postulé que les niveaux d'énergie pour chaque mode oscillatoire des ondes électromagnétiques sont discrets, et donc que la lumière devait être quantisée en « photons ». Cette idée fut ultérieurement exportée avec succès et invoquée en tant que principe dictant comment les particules de matière doivent être interprétées comme les « quanta » de champs tels que les spineurs (solutions de l'équation de Dirac). Dans ce cadre les quantités conservées (telles que les masses, moments, charges, etc.) s'interprètent via le théorème de Noether ou ses généralisations quantiques comme des manifestations des symétries du modèle.

Ce paradigme est à la base de la théorie quantique des champs, il s'est révélé être très fécond et en parfait accord avec les observations expérimentales. Mais il échoue à satisfaire la curiosité de certains physiciens puisque la question de la structure d'une particule est encore éludée. Néanmoins quelques rares personnes (dans la lignée des idées de Kelvin) ont cherché à imaginer des modèles pour la structure d'une particule. Parmi eux nous pouvons citer deux britanniques : P.A.M. Dirac qui a imaginé l'existence d'un monopole électromagnétique et T. Skyrme. L'intérêt des modèles qu'ils ont proposés est qu'ils reposent sur des mécanismes topologiques (donc dans la tradition des idées de Kelvin), qui s'avèrent être particulièrement intéressants pour expliquer pourquoi les charges et de masses des particules ne prennent que des valeurs particulières.

L'apport de Dirac [3], largement commenté dans la littérature, est d'avoir compris que s'il existait dans l'univers un monopole magnétique de charge magnétique g, alors toutes les particules chargées dans l'univers devraient avoir une charge électrique multiple entier de $2\pi\hbar/g$ (cf. [6]). Cette restriction est en effet indispensable pour éviter des incohérences si l'on décrit la particule chargée et son interaction avec le monopole magnétique par une fonction d'onde et repose sur un calcul où la topologie d'un fibré en droite sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (ou sur la sphère S^2) joue un rôle capital. Mais cela resta longtemps une spéculation puisque, jusqu'à nouvel ordre, le monopole de Dirac n'a jamais été observé dans la nature et de plus il devrait avoir une énergie infinie. Plus tard Skyrme proposa, pour les baryons, le modèle suivant [19] : sur un espace de champs u qui sont des applications de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ à valeurs dans la sphère $S^3 \simeq SU(3)$, Skyrme considère l'action

$$\mathcal{A}_S(u) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \left[\eta^{\mu\nu} h_{ij} u^i_\mu u^j_\nu + \kappa^2 \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} h_{ij} h_{kl} \left| \begin{array}{cc} u^i_\mu & u^i_\lambda \\ u^k_\mu & u^k_\lambda \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} u^j_\nu & u^j_\sigma \\ u^l_\nu & u^l_\sigma \end{array} \right| \right] d^4x,$$

où $u^i_\mu := \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}$, κ est une constante de couplage, $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et h_{ij} est la métrique sur S^3. Alors parmi les solutions statiques (indépendantes du temps) on trouve des champs de la forme $u(x) = (\cos\varphi(r), \sin\varphi(r) x/r)$, où $r := |x|$. Ici $u(x)$ tend vers une constante lorsque $r \to \infty$ et l'énergie de la solution est concentrée dans une zone autour de l'origine dans $\mathbb{R}^3$ (de taille κ). De plus le degré topologique de la solution est alors bien défini et constitue une grandeur naturellement quantifiée, susceptible d'être interprétée comme étant par exemple le nombre de baryons. Ce type de solution est un exemple de ce que les physiciens appelent un « soliton » (bien que le problème de Skyrme ne soit vraisemblablement pas complètement intégrable). Contrairement au monopole de Dirac elle a une énergie finie[4].

Nous allons tenter dans la suite d'expliquer le rôle croissant que jouent les solitons dans les modèles fondamentaux de la physique et montrer que parmi les équations qui admettent des solutions de type « soliton », les systèmes intégrables occupent une situation privilégiée. Nous verrons que les tentatives pour réconcilier les deux interprétations possibles d'une particule (celle, aujourd'hui communément admise, de *quantum* et celle, rêvée par Kelvin, Dirac et Skyrme, de *soliton*) semblent réussir là où précisément l'on trouve les systèmes complètement intégrables. On parle alors de *dualité*. En cours de route nous verrons le rôle important joué par les supersymétries.

1 Les « kinks »

Un modèle d'équation de champs non linéaire relativement simple est l'équation

$$\Box\varphi + W'(\varphi)W''(\varphi) = 0, \tag{1}$$

[4]Cette théorie n'est plus considérée aujourd'hui comme un modèle définitif pour les baryons ou les quarks et a été remplacée par les théories de jauge. Néanmoins l'utilisation du modèle de Skyrme pour les quarks conserve un intérêt pour les physiciens et certaines de ses solutions peuvent être vues comme de bonnes approximations des monopoles de Yang–Mills–Higgs [9].

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Box = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}$. Les solutions de cette équation sont les point critiques de

$$\mathcal{A}[\varphi] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla\varphi|^2 - W'(\varphi)^2\right) dt\, dx,$$

où $|\nabla\varphi|^2 := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$. Ici $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière[5]. Nous cherchons des solutions stationnaires, c'est à dire de la forme $\varphi(t, x) = f(x)$. Alors f doit nécessairement satisfaire la condition

$$f'' = W'(f)W''(f). \tag{2}$$

Deux familles de solutions particulières de cette équation sont obtenues par la condition suivante (sorte de « racine carrée » de (2)) :

$$f' = \varepsilon W'(f), \tag{3}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De plus il est naturel de sélectionner les solutions dont l'énergie $E(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + W'(f)^2\right) dx$ est bornée. Cette restriction conduit à s'imposer que $f(x)$ tende vers une constante a_- lorsque $x \to -\infty$ (resp. vers a_+ lorsque $x \to \infty$) et que $W'(a_-) = W'(a_+) = 0$. En dehors des solutions constantes il s'agit des orbites hétéroclines[6] de (3), pour lesquelles $a_- \neq a_+$ (une telle solution existe si par exemple $W(s) = \frac{1}{2}(s^3/3 - s)$). Ces solutions présentent les caractéristiques des solitons, puisque la densité d'énergie $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}W'(f)^2$ y est localisée dans l'espace. De plus on peut associer à chaque solution qui tend vers une constante vers $\pm\infty$ la quantité[7]

$$T(f) := W(a_+) - W(a_-) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(W(f(x))\right) dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (f'(x))^2 dx,$$

que l'on interprète comme une charge (topologique). Nous voyons aussi que, pour les solutions de (3), selon que nous choisissons $\varepsilon = \pm 1$, nous pouvons changer le sens de parcours de f le long de la trajectoire hétérocline et donc le signe de la charge T. Nous appellerons ces solutions des « kinks ». Les kinks obéissent à une sorte de principe d'exclusion, puisqu'il n'est pas possible, pour des raisons topologiques, de concaténer deux kinks identiques l'un à la suite de l'autre. Toutes ces propriétés ont conduit T. Skyrme à conjecturer

[5] nous verrons plus loin la raison du choix $W'(s)^2/2$ pour le potentiel

[6] on exclut les orbites homoclines puisque $\frac{d}{dx}\left(W(f(x))\right) = \varepsilon(f'(x))^2$ garde un signe constant

[7] on pourrait tout aussi bien considérer la différence $a_+ - a_- = \int_{\mathbb{R}} f'(x)dx$, mais cette quantité ne se prête pas à une comparaison avec l'énergie comme T

[20] que ces kinks pouvaient être interprétés comme des quanta d'une théorie des champs fermioniques, ce que nous verrons par la suite.

De plus les kinks sont caractérisés par le fait que ce sont les solutions stationnaires qui minimisent l'énergie $E(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{2}W'(f)^2\right) dx$, avec la condition $\lim_{x\to-\infty} = a_-$ et $\lim_{x\to\infty} = a_+$. En effet l'écriture

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(f' - \varepsilon W'(f))^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(W(f)\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(f' - \varepsilon W'(f))^2 dx + \varepsilon T(f) \end{aligned}$$

prouve que $E(f) \geq |T(f)|$ (puisque $|T(f)| = \varepsilon T(f)$) avec égalité si et seulement si f satisfait (3), c'est à dire est un kink. Cet argument a été généralisé à bien d'autres modèles (notamment les monopoles statiques de Yang–Mills–Higgs en dimension 3, [11]) et les solutions miminimisantes ainsi obtenues sont appelées *solutions de Bogomolny'i* : on obtient à chaque fois une minoration de la « masse » E en fonction d'une charge topologique T.

2 Interprétation supersymétrique

L'existence de solutions de type Bogomolny'i et de la charge topologique T peut être vue comme la manifestation d'une structure cachée : la possibilité d'une extension supersymétrique. Cette elle qui est notament responsable de la forme particulière du potentiel $(W'(f))^2$.

Rappelons que l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est invariant par le groupe de Poincaré $\mathfrak{P}^{(1,n)} = SO(1,n) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$. Ce groupe agit naturellement sur les champs φ définis sur $\mathbb{R}^{1,n}$ par $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^{1,n}$, où $g \in \mathbb{R}^{1,n}$. Les théories de champs sont en général invariantes par l'action de ce groupe, ce qui, par le biais du théorème de Noether (au niveau classique) ou des identités de Ward (sur le plan quantique) est à l'origine de la conservation de la masse et du moment (impulsion) pour un système isolé. Le « no go » théorème de Coleman et Mandula affirme qu'il n'est pas possible d'étendre le groupe de symétrie $\mathfrak{P}^{(1,n)}$ de façon ordinaire. Mais cela est possible en revanche si l'on autorise des symétries non classiques, appelées *supersymétries*[8]. Pour cela nous devons coupler des champs décrivant des bosons avec autant de champs décrivant des fermions (et la représentation quantique d'un générateur dans

[8]les motivations initiales pour l'introduction des supersymétries furent, outre un intérêt esthétique indéniable, de construire des théories quantiques qui se prêtent mieux à la renormalisation (ce qui est le cas). De plus les supersymétries jouent un rôle capital dans les théories des cordes puisque notament c'est grâce à elles que l'on peut construire de telles théories sans tachyons.

la (super)algèbre de Lie des supersymétries sera un opérateur qui échange les bosons et les fermions). Un modèle simple, pour $n = 1$, est

$$\mathcal{A}[\varphi, \psi, F] := \int_{\mathbb{R}^{1,1}} \frac{1}{2} \left(|\nabla\varphi|^2 + \psi\mathcal{D}\psi + F^2 \right) dt\, dx,$$

où φ, F sont des champs bosoniques « pairs » et $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ est une paire de champs fermioniques « impairs » (spineur)[9]. On note $\psi\mathcal{D}\psi := \psi_1 \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \right) + \psi_2 \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} \right)$. Les points critiques de $\mathcal{A}$ satisfont les équations[10]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Box\varphi & = & 0 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & = & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} = 0 \\ F & = & 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

L'action $\mathcal{A}$ est invariante par les transformations $Id - \eta\tau_1$ et $Id - \eta\tau_2$, où

$$\eta\tau_1 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ F \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ -F \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta\tau_2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ F \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \psi_2 \\ F \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et donc ces transformations laissent (formellement) invariant l'ensemble des solutions de (4). Ici η est un paramètre impair (de façon à respecter la parité des champs φ, ψ_a et F). Le calcul du commutateur de deux transformations $\eta\tau_a$ et $\tilde{\eta}\tau_b$ donne un résultat très intéressant : on obtient un générateur infinitésimal de translation dans l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,1}$:

$$\begin{array}{rcl} [\eta\tau_1, \tilde{\eta}\tau_1] & = & -2\eta\tilde{\eta} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} \right) \\ [\eta\tau_1, \tilde{\eta}\tau_2] & = & 0 \\ [\eta\tau_2, \tilde{\eta}\tau_2] & = & -2\eta\tilde{\eta} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x} \right). \end{array}$$

Ici apparaît le lien entre les transformations $\eta\tau_a$ et $\tilde{\eta}\tau_b$ et le groupe de Poincaré : les « supertranslations » $\eta\tau_a$ et $\tilde{\eta}\tau_b$ génèrent, par crochet de Lie les

[9]Soulignons que les composantes impaires ψ_a, $\frac{\partial\psi_a}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_a}{\partial x}$ (qui sont pour le modèle présenté ici des composantes de vecteurs sur $\mathbb{R}$) doivent être manipulées comme des quantités qui anticommutent. Par exemple $\psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1$, $\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\psi_1$, etc. Egalement il n'est pas possible de considérer F et même φ comme des nombres réels sans aboutir à des incohérences et ces quantités doivent être envisagées comme éléments « pairs » d'une algèbre, qui commutent avec toutes les autres variables : ainsi $\psi_1\varphi = \varphi\psi_1$.

[10]Observer qu'un champ bosonique satisfait une équation différentielle de degré pair, tandis qu'un champ fermionique satisfait une équation différentielle de degré impair

translations de l'espace-temps. On peut donc adjoindre à l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^{(1,1)}$ les générateurs τ_1 et τ_2 : cela donne non pas une algèbre de Lie, mais une superalgèbre de Lie $\mathfrak{p}^{(1,1)|2}$. En effet, une fois que l'on a éliminé les paramètres auxiliaires η et $\tilde{\eta}$, les relations de commutation écrites plus haut s'expriment en terme des supercommutateurs $[\tau_a, \tau_b]_+ := \tau_a \cdot \tau_b + \tau_b \cdot \tau_a$, à savoir : $[\tau_1, \tau_1]_+ = 2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $[\tau_1, \tau_2]_+ = 0$ et $[\tau_2, \tau_2]_+ = 2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$. On obtient alors la superalgèbre de Lie du supergroupe de de Poincaré[11] $\mathfrak{p}^{(1,1)|2}$.

Le lagrangien simple que nous avons vu modélise la superposition libre de deux champs bosoniques (φ et F) et de deux champs fermioniques (ψ_1 et ψ_2)[12]. Il serait intéressant de coupler ces champs en ajoutant un terme de potentiel $-\int_{\mathbb{R}^{1,1}} V(\varphi, \psi, F) dt\, dx$ à l'action $\mathcal{A}[\varphi, \psi, F]$, tout en cherchant à préserver l'invariance par la supersymétrie. Cela n'est possible que pour certains types de potentiel et conduit à considérer l'action :

$$\mathcal{A}_W[\varphi, \psi, F] := \int_{\mathbb{R}^{1,1}} \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + \frac{\psi \mathcal{D} \psi}{2} + \frac{F^2}{2} - W''(\varphi)\psi_1\psi_2 + W'(\varphi)F \right) dt\, dx,$$

où $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Les équations d'Euler–Lagrange sont alors

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \Box\varphi - W''(\varphi)F + W'''(\varphi)\psi_1\psi_2 & = & 0 & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} - W''(\varphi)\psi_2 & = & 0 & \text{(b)} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} + W''(\varphi)\psi_1 & = & 0 & \text{(c)} \\ F + W'(\varphi) & = & 0 & \text{(d)} \end{array} \right. \tag{5}$$

Observons que si nous choisissons de nous restreindre aux champs (φ, ψ, F) pour lesquels $\psi = 0$ et $F = -W'(\varphi)$[13] , alors l'action $\mathcal{A}_W[\varphi, 0, -W'(\varphi)]$ est égale à $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,1}} \left(|\nabla\varphi|^2 - W'(\varphi)^2\right) dt\, dx$ (i.e. elle coïncide avec l'action étudiée à la section précédente) et (5) (a) et (d) redonnent exactement (1) en éliminant F.

Deuxièmement si nous prenons un champ de la forme $(\varphi, \psi, -W'(\varphi))$ et nous supposons qu'il est annulé par $\tau_1 - \varepsilon\tau_2$ (où $\varepsilon = \pm 1$) alors φ est une solution de Bogomolny'i. En effet, dans le cas où $(\varphi, \psi, F) = (\varphi, \psi, -W'(\varphi))$

[11] dans lequel le sous-groupe $SO(1,1)$ agit sur τ_1 et τ_2 par une représentation spinorielle

[12] le lecteur aura observé que F n'a aucun intérêt sur le plan dynamique mais est indispensable pour que la supersymétrie ait lieu

[13] ainsi les équations (5) (b) et (c) sont satisfaites de façon triviale et F est l'unique solution de (5) (d)

on a

$$(\tau_1 - \varepsilon\tau_2)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi_1\\ \psi_2\\ F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1 - \varepsilon\psi_2\\ \varepsilon W'(\varphi) - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ W'(\varphi) + \varepsilon\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + \varepsilon\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\end{pmatrix}.$$

Donc $(\tau_1 - \varepsilon\tau_2)(\varphi, \psi, -W'(\varphi)) = 0$ entraîne que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & = & \varepsilon W'(\varphi)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & = & -\varepsilon W'(\varphi)\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} & = & 0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & = & \varepsilon W'(\varphi)\end{array}\right.$$

Et φ est bien une solution de (1) de type Bogomolny'i. Un des intérêts majeurs de cette caractérisation des solutions classiques de Bogomolny'i est qu'elle garde un sens dans le cadre de la théorie quantique de ces champs : les états quantiques correspondant, appelés *états PBS* (Bogomolny'i, Prasad, Sommerfeld), sont simplement les états sans fermions ($\psi = 0$) qui sont annulés par les opérateurs $Q_{\tau_1} - \varepsilon Q_{\tau_2}$ (correspondant à $\tau_1 - \varepsilon\tau_2$).

Enfin la charge topologique $T = \int_{\mathbb{R}^{1,1}} W'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx$ trouve ici une nouvelle interprétation : les charges correspondant aux symétries τ_1 et τ_2 sont respectivement

$$\begin{aligned}Q_{\tau_1} &= \int_{\mathbb{R}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\psi_1 - W'(\varphi)\psi_2\right]dx\\ Q_{\tau_2} &= \int_{\mathbb{R}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\psi_2 + W'(\varphi)\psi_1\right]dx.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer le (super)crochet de Poisson $\{Q_{\tau_1}, Q_{\tau_1}\}_+$ de ces deux observables : on s'attendrait à ce que $\{Q_{\tau_1}, Q_{\tau_1}\}_+$ soit la charge associée à $[\tau_1, \tau_2]_+$, c'est à dire soit nulle. Mais ça n'est pas tout à fait vrai, puisqu'on obtient[14] :

$$\{Q_{\tau_1}, Q_{\tau_1}\}_+ = 2\int_{\mathbb{R}}(W'(\varphi))\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = 2T.$$

Cela signifie que l'ensemble des charges (de Noether) $Q_{\mathfrak{p}^{(1,1)|2}} := \{Q_\xi/\xi \in \mathfrak{p}^{(1,1)|2}\}$ muni du supercrochet de Poisson n'est pas une superalgèbre de Lie. Mais en revanche, si nous complétons $Q_{\mathfrak{p}^{(1,1)|2}}$ en $\tilde{Q}_{\mathfrak{p}^{(1,1)|2}} := Q_{\mathfrak{p}^{(1,1)|2}} \oplus \mathbb{R}T$, nous obtenons une superalgèbre de Lie, qui est isomorphe à une extension centrale de $\mathfrak{p}^{(1,1)|2}$. Ainsi la charge T possède une double interprétation, topologique et au sens du théorème de Noether (faut-il y voir l'indication d'une dualité ?).

[14] en utilisant notament $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_+ = \delta_{ab}\delta(x-y)$

Mentionnons pour terminer cette section que beaucoup de modèles supersymétriques (dont celui que nous venons de voir) gagnent à être formulés comme des théories de champs définis non pas sur un espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, mais sur un super-espace de Minkowski $\mathbb{R}^{(1,n)|m}$, qui est un espace homogène sur lequel agit le supergroupe de Poincaré $\mathfrak{P}^{(1,n)|m}$. Ici m est le nombre de coordonnées « impaires » $\theta^1, \cdots, \theta^m$ qui, au contraire des coordonnées ordinaires $x^0, \cdots, x^n$ sur $\mathbb{R}^{1,n}$, anticommutent entre elles (et commutent avec les x^μ). Ainsi les champs (φ, ψ, F) que nous avons vus précédemment peuvent s'interpréter comme les composantes (« multiplet ») d'un seul champ $\Phi := \varphi + \theta^1\psi_1 + \theta^2\psi_2 + \theta^1\theta^2 F$ défini sur le superespace de Minkowski $\mathbb{R}^{(1,1)|2}$. On peut alors présenter de façon géométrique les transformations τ_1 et τ_2 : ce sont les dérivations selon des champs de vecteurs « impairs » (invariants à gauche) qui génèrent des supertranslation dans $\mathbb{R}^{(1,1)|2}$; plus précisément $\tau_1 = \frac{\partial}{\partial\theta^1} + \theta^1\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $\tau_2 = \frac{\partial}{\partial\theta^2} + \theta^2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Notons enfin que le groupe $\mathfrak{P}^{(1,2)|2}$ possède une structure plus naturelle que $\mathfrak{P}^{(1,1)|2}$ (cela provient du fait que le groupe spin de $SO(1,2)$ est isomorphe à $SL(2,\mathbb{R})$) et que $\mathfrak{P}^{(1,1)|2}$ peut s'obtenir par « réduction » à partir de $\mathfrak{P}^{(1,2)|2}$ (c'est à dire comme un sous-groupe). Et cela est relié au fait que $\mathfrak{P}^{(1,1)|2}$ possède une extension centrale non triviale comme celle qui fut « responsable » de la charge T, tandis que $\mathfrak{P}^{(1,2)|2}$ n'a pas d'extension centrale non triviale [5].

3 Dualités

Revenons aux kinks et à la conjecture de Skyrme[15] sur leur interprétation fermionique : celle-ci a pu être vérifiée par des calculs perturbatifs très précis[16] par S. Coleman en 1975 pour un exemple particulier [2]. Il s'agit de l'équation de sin–Gordon. Alors le potentiel est

$$W(s) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta^2}\cos\frac{\beta s}{2},$$

où α et β sont des constantes réelles positives. L'équation d'Euler–Lagrange correspondante est

$$\Box\varphi + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\varphi = 0.$$

[15] l'idée de Skyrme [20] était qu'il possible de construire une théorie des champs fermioniques dont les fluctuations quantiques sont les solitons d'une théorie bosonique. L'opérateur de champ est obtenu par $\psi_\pm =: \exp i\beta\left(\varphi \pm \int_{-\infty}^x \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s)ds\right)$: C'est un exemple d'opérateur de vertex.

[16] mais malheureusement dans le cadre de théories dont les bases mathématiques ne sont pas encore bien construites

Le résultat, prodigieux, est que lorsque l'on quantifie cette théorie les états BPS se comportent exactement comme les quanta d'une autre théorie très différente : le modèle de Thirring massif, dont l'action est

$$\mathcal{A}_{Th}[\psi] := \int_{\mathbb{R}^{1,1}} \left(\overline{\psi}(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\psi - \frac{1}{2} g \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\right) dt\, dx.$$

Ici ψ est un champ de spineur dont les composantes complexes sont ψ_1 and ψ_2, les matrices de Dirac sont

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$ avec $\eta_{00} = -\eta_{11} = 1$, $\eta_{01} = \eta_{10} = 0$.

En comparant la théorie quantique perturbative de l'équation de sin–Gordon avec celle du modèle de Thirring massif, S. Coleman a trouvé que les deux modèles sont équivalents, pourvu que l'on fasse les identifications

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = 1 + \frac{g}{\pi}. \tag{6}$$

Et, *au sens des opérateurs quantiques*[17],

$$\overline{\psi}\gamma^1\psi\ dt + \overline{\psi}\gamma^0\psi\ dx = i\frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\right), \tag{7}$$

$$m\overline{\psi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi = -\frac{\alpha}{\beta^2}e^{i\beta\varphi} \quad \text{et} \quad m\overline{\psi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi = -\frac{\alpha}{\beta^2}e^{-i\beta\varphi}.$$

De façon plus précise, S. Coleman a vérifié que les fonctions de Green à n points des deux théories coïncident. Ce résultat a été confirmé par d'autres méthodes par S. Mandelstam [8] et depuis par d'autres auteurs.

Insistons sur le fait que (7) identifie deux formes qui, pour les solutions classiques, sont fermées, mais chacune pour une raison différente. Celle de gauche est un courant de Noether associé à une invariance par une action de $U(1)$ sur l'équation de Thirring (courant « électrique »), celle de droite est toujours fermée, même si φ n'est pas une solution de l'équation de sin-Gordon (charge « topologique »). De plus (6) relie les constantes de couplage β et g d'une façon intéressante : si β est proche de 0, alors la théorie perturbative de l'équation de sin–Gordon est relativement bonne, mais alors g est très grand et la théorie perturbative du modèle de Thirring n'est pratiquement pas exploitable. Cette situation est inversée si $\beta \leq \sqrt{4\pi}$ est proche de $\sqrt{4\pi}$ et g est proche de 0.

[17]on omet ici la constante de renormalisation qui dépend de la régularisation

4 Systèmes intégrables

Il est remarquable que, parmi les modèles de champs bidimensionnels que nous avons vus à la première section et qui admettent des solutions « kink », la conjecture de dualité n'ait pu être vérifiée que pour l'équation de sin–Gordon, qui est également connue pour être complètement intégrable. Expliquons rapidement cette propriété. A tout application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ associons la 1-forme sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients dans l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} A_\lambda \;:=\;& -\frac{i}{\lambda}\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\beta\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\beta\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} dt^+ \\ & +\frac{\beta}{4}(*d\varphi)\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} - i\lambda\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\beta\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\beta\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} dt^-, \end{aligned}$$

où $t^\pm := t \pm x$, $*d\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial x}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dx$ et où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est un paramètre complexe. La forme de courbure de A_λ est

$$dA_\lambda + A_\lambda \wedge A_\lambda = \frac{\beta}{2}\left(\Box\varphi + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\varphi\right)\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} dt \wedge dx.$$

Celle-ci s'annule si et seulement si φ est une solution de l'équation de sin–Gordon. Cette propriété est caractéristique des systèmes intégrables. En effet elle implique que, pour toute solution φ de l'équation de sin–Gordon, il est possible de construire une famille d'applications $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $SL(2,\mathbb{C})$ satisfaisant[18] $dF_\lambda = F_\lambda \cdot A_\lambda$ sur $\mathbb{R}^2$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Cette formulation relie naturellement les solutions φ de sin–Gordon à une application F_λ définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans le groupe de lacet $LSL(2,\mathbb{C}) := \{S^1 \ni \lambda \longmapsto g_\lambda \in SL(2,\mathbb{C})\}$. Une illustration de cette théorie est obtenue en adaptant la théorie développée par Dorfmeister, Pedit et Wu [4] pour les applications harmoniques : pour une valeur générique de $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ fixée, nous pouvons décomposer l'application $\lambda \longmapsto F_\lambda(t,x)$ définie sur le cercle $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ en un produit $F_\lambda(t,x) = F_\lambda^-(t,x)\cdot F_\lambda^+(t,x)$, où $\lambda \longmapsto F_\lambda^+(t,x)$ admet un prolongement holomorphe à l'intérieur du disque unité et $\lambda \longmapsto F_\lambda^-(t,x)$ admet un prolongement holomorphe à l'extérieur du disque, qui converge vers $1_{SL(2,\mathbb{C})}$ à l'infini (décomposition de Birkhoff, [15]). Alors nous obtenons que $(F_\lambda^-)^{-1}\cdot dF_\lambda^- = \lambda^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1/u \\ u & 0 \end{pmatrix} dt^+$, où $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfait $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Ainsi cette transformation convertit une solution d'une équation différentielle non linéaire (sin–Gordon) en une équation linéaire très simple.

[18] cette famille est unique si de surcroît on impose une condition telle que $F_\lambda(0)_\lambda = 1_{SL(2,\mathbb{C})}$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$. De plus on a $F_\lambda(t,x) \in SU(2)$, si $|\lambda| = 1$.

La plupart des systèmes intégrables qui ont été découverts jusqu'à présent partagent des structures très similaires. Ainsi l'équation de sin–Gordon se retrouve parmi plusieurs familles d'équations à deux variables qui interviennent dans des problèmes issus de la géométrie ou de la physique comme par exemple celui des applications harmoniques à valeurs dans des espaces homogènes. L'équation de Korteweg–de Vries et ses généralisations (équations de Kadomstev–Petviashvili, KP) présentent une structure différente, mais qui se décrit toujours de façon naturelle dans le langage géométrique des groupes de lacets (et de leurs extensions centrales) et de leur action sur la grassmannienne de Sato [16]. Ces systèmes intégrables à deux variables, organisés en « familles » structurées en hiérarchies, peuvent (pour la plupart) être vus comme des réductions d'équations encore plus générales, comme celle des connexions (anti)autoduales sur une variété de dimension 4 ou bien des variétés d'Einstein (anti)autoduales de dimension 4. Dans ces deux derniers cas l'approche privilégiée consiste à relever les équations sur l'espace des twisteurs, variété complexe de dimension 3, fibrée au-dessus de l'espace-temps quadridimensionnel, ce qui permet à nouveau d'interpréter l'équation étudiée comme une condition d'intégrabilité pour un système linéaire surdéterminé (et donc analogue à la résolution de $dF_\lambda = F_\lambda \cdot A_\lambda$).

5 Convergences

Nous avons vu dans un cadre relativement simple que la recherche de modèles où la dualité entre solitons et quanta semble se réaliser et la recherche de systèmes intégrables conduisent à privilégier les mêmes exemples d'équations. Il est probable que ce parallèle entre les deux démarches soit plus profond. Ainsi, bien qu'on ne sache pas prouver rigoureusement la dualité entre l'équation de sin–Gordon et le modèle de Thirring massif, on sait établir une dualité analogue pour des modèles plus simples, dits « abéliens », pour lesquelles les kinks sont remplacés par des fonctions constantes par morceau, admettant des sauts. La preuve de ce résultat repose sur les *algèbres de vertex*, dont une description géométrique utilise précisément... la géométrie des groupes de lacet (plus exactement la théorie des représentations de leurs extensions centrales, cf. [15], [10]).

Cette convergence des deux démarches est confirmée par d'autres modèles, plus élaborés : un exemple important est la possibilité d'établir une dualité entre « électricité » et « magnétisme », analogue à celle qui inspira Dirac dans sa construction du monopole magnétique, envisagée par D. Olive et C. Montonen [11] pour le modèle de Yang–Mills–Higgs. Il semble qu'une telle dualité soit possible, bien que cela reste toujours une conjecture.

Comme il a été remarqué par E. Witten et D. Olive [12], la vérification de cette conjecture devrait être grandement facilitée si l'on considère la version supersymétrique des champs de Yang–Mills–Higgs, avec deux systèmes de variables fermioniques (« $N = 2$ »). Cela repose sur un mécanisme similaire à celui que nous avons vu dans la section 2 de cet article. La première confirmation de ces conjectures fut obtenue par A. Sen [18] avec quatre systèmes de variables fermioniques ($N = 4$). Puis une autre confirmation a été obtenue par N. Seiberg et E. Witten [17] pour la théorie $N = 2$. A nouveau ces théories font intervenir de façon naturelle des systèmes complètement intégrables (variétés hyperkählériennes, etc.) et les supersymétries.

D'autres dualités ont été découvertes, comme par exemple la T-dualité, qui est à l'origine de la « symétrie miroir », qui fait correspondre à une variété de Calabi–Aubin–Yau une autre, en échangeant certaines données caractérisant les structures complexes et symplectiques. La liste d'exemple est longue et nous renvoyons à [12] pour d'avantage de détails (voir aussi une introduction dans [6]). La « *théorie M* », actuellement en construction et censée réunir en une seule toutes les théories des supercordes connues (ainsi que la supergravitation en dimension 11), repose sur ces diverses dualités.

Un dernier parallèle peut être établi entre les modèles d'espace-temps supersymétriques, et les systèmes intégrables[19]. En effet, compte tenu de plusieurs contraintes physiques (exclure les particules de spin plus grand que 2, avoir autant de bosons que de fermions) les modèles supersymétriques pertinents sont relativement restreints et les dimensions d'espace-temps envisageables ne peuvent varier que de 1 à 10 (ou 11 pour la supergravitation). Et parmi ces dimensions, quatre sont privilégiées : $1 + 2$, $1 + 3$, $1 + 5$ et $1 + 9$ (cf. [5]). Ce sont les dimensions pour lesquelles les groupes spin correspondant sont isomorphes respectivement à $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$, $SL(2, \mathbb{H})$ et $SL(2, \mathbb{O})$[20]. Géométriquement ces dimensions correspondent aux espaces-temps dans lesquels la sphère céleste est la droite projective sur (respectivement) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$. Et alors les supergroupes de Poincaré admettent des représentations particulièrement simples et qui redonnent la plupart des exemples connus des supergroupes de Poincaré (et de leurs extensions centrales) par réduction à de plus basses dimensions[21]. La ressemblance avec les

[19] bien que, comme le lecteur l'aura remarqué dans ce qui précède, le fait d'imposer à un modèle d'être supersymétrique ne garantisse pas que ce modèle soit complétement intégrable

[20] des précautions sont nécessaires pour définir correctement le groupe spécial sur les octonions $\mathbb{O}$, cf. [5], [1]

[21] ainsi par exemple la théorie de Yang–Mills–Higgs $N = 4$ supersymétrique en dimension $1 + 3$ s'obtient par réduction à partir d'une théorie supersymétrique en dimension $1 + 9$, cf. [14]

systèmes intégrables est que l'on retrouve une organisation des différentes théories par réductions de théories « fondamentales » de dimension « maximale » à des théories dérivées, de plus basse dimension (par comparaison, dans l'état actuel de nos connaissances, les systèmes intégrables les plus « fondamentaux » vivent sur des variétés de dimension 4 et sont gouvernés par $\mathbb{C}$ via l'espace des twisteurs). Cette analogie pose la question de l'existence de systèmes intégrables « fondamentaux » en dimension 6 ou 10 (dans lesquelles les quaternions ou les octonions joueraient un rôle).

6 Conclusion

Nous avons vu quelques idées qui sont actuellement explorées par les physiciens dans leur recherche de théories unificatrices. Il est encore trop tôt pour savoir si de telles spéculations aboutiront ou non et il est probable que les progrès que nous espérons voir venir dans la compréhension de ce qui se cache derrière la renormalisation viendront bouleverser un jour ces théories. Le fil conducteur de ces efforts est la recherche de théories esthétiques, reposant sur les structures mathématiques les plus parfaites (supersymétries, systèmes complètement intégrables, dualités). On peut objecter à ces théories qu'elles risquent de perdre le lien avec toute confirmation expérimentale : c'est sans doute partiellement vrai, mais probablement les physiciens théoriciens n'ont pas d'autres possibilités que de suivre ces principes, à cause de l'absence de données expérimentales. Dans le passé ce genre de démarche a parfois conduit à des impasses (comme les tentatives d'expliquer le mouvement des astres par des mouvements de « sphères célestes » jusqu'à Képler), mais a aussi obtenu des succès, comme par exemple l'équation de Dirac.

Remerciements — *Je tiens à remercier Daniel Bennequin et Joseph Kouneiher pour les nombreux échanges fructueux que nous avons eus sur ce sujet.*

Références

[1] J.C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 39, No. 2 (2002).

[2] S. Coleman, *Quantum sine–Gordon equation as the massive Thirring model*, Phys. Rev. D, Vol. 11, N. 8 (1975), 2088–97.

[3] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A 133, 60, 1931

[4] J. Dorfmeister, F. Pedit, H.-Y. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. and Geom. 6 (1998), 633–668.

[5] D. Freed, P. Deligne, *Notes on supersymmetry*, *Notes on spinors* et *Supersolutions*, in “Quantum Fields ans Strings : a Course for Mathematicians”, volume 1, P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L.C. Jeffrey, D. Kazhdan, J.W. Morgan, D.R. Morrison, E. Witten, ed., AMS, 1999.

[6] F. Hélein, J. Kouneiher, *On the Soliton-Particle Dualities*, to appear.

[7] D.J. Korteweg, G. de Vries, Phil Mag. 39, 422 (1895)

[8] S. Mandelstam, *Soliton operators for the quantized sine–Gordon equation*, Phys. Rev. D, Vol. 11, N. 10 (1975), 3026–30.

[9] N.S. Manton, *Skyrme fields and instantons*, in "Geometry of Low-dimensional Manifolds : 1", S.K. Donaldson and C.B. Thomas ed., London Math. Soc. Lec. Notes Series 150 (1990), Cambridge University Press.

[10] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons*, Cambridge Tracts in Math. 135, Cambridge University Press, 2000.

[11] C. Montonen, D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles ?*, Phys. Lett. **72B**, n. 1 (1977).

[12] D.I. Olive, P.C. West, *Duality and Supersymmetric Theories*, Pub. of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1999.

[13] D. Olive, E. Witten, *Supersymmetry algebra that include topological charges*, Phys. Lett. **78B**, n. 1 (1978).

[14] H. Osborn, *Topologica charges for $N = 4$ supersymmetric gauge theories and monopoles of spin 1*, Phys. Lett. Vol. 83B, No. 3, 4 (1979), 321–326.

[15] A. Pressley, G.B. Segal, *Loop groups*, Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 1986.

[16] G.B. Segal, G. Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Pub. Math. I.H.E.S. 61 (1981), 5–65.

[17] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. **B426**, 19, (1994) ; [hep-th/9407087]

[18] A. Sen, *Dyon–Monopole bound state, self-dual harmonic forms on the multi-monopole space, ans $SL(2, \mathbb{Z})$ invariance in string theory*, Phys. Lett. B 329 (1994), 217–221.

[19] T.R.H. Skyrme, *A unified theory for mesons and baryons*, Nucl. Phys. 31 (1962), 556 ; Proc. Roy. Soc. **A 247**, 260, (1958)

[20] T.R.H. Skyrme, *Kinks and the Dirac equation*, J. Math. Phys.12 (1971), 1735–42.

[21] W. Thirring, Ann. Phys. (N.Y.) **3**, 91, (1958)