Postface : analyse et géométrie

Frédéric HÉLEIN*
Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586
Université Denis Diderot – Paris 7,
Case 7012, 2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France

18 mars 2005

Le Lecteur aura pu mesurer dans cet ouvrage à quel point, au cours du vingtième siècle, la géométrie et l'algèbre se sont enrichies mutuellement au cours du vingtième siècle par des échanges de questions, de solutions, d'outils conceptuels et de points de vue. Les interactions entre deux disciplines scientifiques sont chose courante, mais il est frappant de constater que les affinités entre la géométrie et l'algèbre vont plus loin que d'ordinaire, puisque ces deux disciplines ont fait l'objet de tentatives de fusion, qui se sont avérées être très fructueuses. Cela est sans doute dû au fait que, d'une part, la géométrie et l'algèbre partagent la propriété d'être hautement structurées, de sorte qu'une partie importante des progrès peut être intégrée dans le langage même de ces théories, et d'autre part, la géométrie et l'algèbre ont en commun l'ambition d'abstraire du monde mathématique (ou plus généralement physique) des *images* (pour la première) ou des *structures* (pour la deuxième) qui rendent intelligibles des phénomènes d'apparence complexe, tout en étant les plus simples possibles. Ces caractéristiques expliquent aussi les liens privilégiés qu'entretiennent l'algèbre et la géométrie avec la physique.

Mais le vingtième siècle a aussi été une période durant laquelle l'analyse a connu un développement sans précédent et a apporté des réponses à certaines des questions les plus difficiles que s'étaient posés les géomètres. Notons qu'on ne peut pas parler d'identification entre l'analyse et la géométrie, et cela en grande partie à cause d'une différence de nature entre les deux disciplines : en comparaison avec la forte organisation de la géométrie, l'analyse s'apparente d'avantage à un savoir-faire, même si ce savoir-faire s'appuie sur un socle théorique important. Toutefois, si l'on adopte le point de vue de la pratique du chercheur, on rencontre de fortes similitudes dans la façon de raisonner entre géomètres et analystes, et beaucoup d'idées fécondes en analyse reposent sur une intuition géométrique. Cette présence de la géométrie se remarque autant dans certaines constructions théoriques comme la théorie des espaces de Hilbert et de Banach (suscitée par la théorie

*helein@math.jussieu.fr

de Lebesgue et l'analyse de Fourier, cf. [35]) ou encore la théorie de M. Morse, que dans certaines idées intégrées dans des démonstrations comme par exemple l'utilisation des propriétés des ensembles de niveau d'une fonction faite par G. Stampacchia pour prouver la régularité d'une solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique.

En marge de ces considérations qui mériteraient certainement d'être développées plus profondément, dans ce qui suit nous souhaitons simplement illustrer, à travers quelques exemples, comment l'analyse est montée en puissance durant le siècle passé et a apporté des réponses à quelques questions fondamentales de la géométrie.

Les débuts difficiles du calcul des variations

A la fin du dix-neuvième siècle la plupart des méthodes d'analyse utilisées pour résoudre des problèmes de géométrie différentielle reposaient essentiellement des manipulations de fonctions analytiques : les fonctions envisagées étaient donc en général supposées être développables en série. Cela autorisait des calculs « explicites » (mais laborieux) et surtout cela permettait d'utiliser toute la puissance de la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont les bases avaient été consolidées par K. Weierstrass. Un exemple de problème issu de la géométrie est l'équation

$$\Delta u = e^{2u}, \tag{1}$$

où l'inconnue u est une fonction définie sur une surface de Riemann Σ. Toute solution de cette équation permet de construire une métrique $e^{2u}dzd\overline{z}$ sur Σ dont la courbure est constante et égale à -1 (c'est à dire une métrique hyperbolique)[1]. Une première solution, locale, de ce problème avait été obtenue par E. Picard en 1890 [48]. En 1898 H. Poincaré [53] proposa une nouvelle méthode de résolution de (1). Dans la preuve de Poincaré, la

[1]Je ne peux résister au plaisir de m'attarder un peu sur le contexte fascinant dans lequel est apparue cette équation. Le point de départ fut l'étude par H. Poincaré de l'équation (3) (cf. infra), qu'il avait appelée *équation fuchsienne*. Le prolongement des solutions de cette équation autour des pôles de q fait apparaître une monodromie que l'on peut naturellement décrire par un sous-groupe du groupe de Möbius $PGL(2,\mathbb{C})$. Une des nombreuses contributions de Poincaré sur ce sujet a été d'établir un lien entre ce problème et la géométrie hyperbolique : le groupe de monodromie agit par isométrie sur le demi-plan hyperbolique $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} w > 0\}$. En voici, en bouleversant un peu l'ordre historique des idées, un exemple d'application, dont le but est d'« uniformiser » une surface Σ de la forme $P\mathbb{C}^1 \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$, où $a_1, \cdots, a_n$ sont n (≥ 3) points distincts de $P\mathbb{C}^1$.

Il s'agit en langage moderne de prouver que Σ est holomorphiquement difféomorphe à un quotient du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$ par un sous-groupe Γ de $PGL(2,\mathbb{C})$, appelé groupe « fuchsien » par H. Poincaré. Autrement dit nous voulons construire une application holomorphe $f : \widehat{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{H}$, où $\widehat{\Sigma}$ est le revêtement universel de Σ, telle que $\forall \gamma \in \Pi_1(\Sigma)$, $\forall z \in \widehat{\Sigma}$, $f(\gamma \cdot z) = \gamma \cdot f(z)$, où γ agit sur $\mathbb{H}$ par transformations homographiques. L'application f est—modulo l'action du groupe de Möbius— déterminée par son *schwarzien*

$$S(f)(z) := \left(\frac{f_{zz}}{f_z}\right)_z - \frac{1}{2}\left(\frac{f_{zz}}{f_z}\right)^2 = \frac{f_{zzz}}{f_z} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_{zz}}{f_z}\right)^2.$$

Notons qu'il est plus facile d'obtenir des informations sur $S(f)$ que sur f, puisque, comme $S(\gamma \cdot f) = S(f)$ pour toute transformation homographique γ, $S(f)$ est une fonction holomorphe sur Σ. En fait $S(f)(z)(dz)^2$ est une différentielle quadratique méromorphe sur $P\mathbb{C}$ dont les pôles sont $a_1, \cdots, a_n$, de la solution est construite en partant d'une équation possédant une solution triviale et en réitérant des déformations de l'équation, jusqu'à obtenir une solution du problème (1). Chaque étape de l'itération consiste à résoudre une perturbation linéaire de l'équation résolue à l'étape précédente par un développement en série selon un petit paramètre. Un argument crucial, qui reste aujourd'hui un outil de base des analystes, est l'utilisation du principe du maximum pour montrer notament que le processus itératif aboutit. Dans ce même article, H. Poincaré entrevoit une autre méthode :

« *avant de démontrer, par des procédés rigoureux, l'intégrabilité de cette équation, je veux d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus fondés sur le calcul des variations dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique.* »

---

forme

$$S(f)(z)(dz)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2(z-a_i)^2} + \frac{c_i}{z-a_i}\right)(dz)^2. \tag{2}$$

Elle donc est totalement déterminée par les coefficients c_i qui sont appelés *paramètres accessoires*. Réciproquement si considérons une forme différentielle quadratique méromorphe $Q = q(z)(dz)^2$ sur $P\mathbb{C}^1$ de la même forme que $S(f)(z)(dz)^2$ dans (2), nous pouvons construire une application f sur le revêtement universel de Σ de façon telle que $S(f) = q$ en intégrant l'équation « fuchsienne »

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{q}{2}y = 0, \tag{3}$$

sur $\widehat{\Sigma}$ et en posant $f = \frac{y_2}{y_1}$, où y_1 et y_2 sont deux solutions distinctes de (3). La difficulté rencontrée était dans le choix des paramètres accessoires : non seulement il faut que l'équation (3) n'ait que des points singuliers réguliers (ce qui est garanti par les conditions $\sum_{i=1}^{n-1} c_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i = 0$) mais en plus il faut que l'application f ainsi obtenue donne une application à valeurs dans le demi-plan $\mathbb{H}$ (c'est à dire qu'elle soit une « fonction fuchsienne »). Cette propriété n'est satisfaite que pour au plus une seule valeur de $(c_1, \cdots, c_{n-1})$. Mais il était très difficile de montrer l'existence d'une valeur de ces paramètres garantissant le fait que l'équation soit fuchsienne. Ce problème avait été résolu par par F. Klein [34] et H. Poincaré [52] par une méthode relativement compliquée (« méthode de continuité »).

Une autre approche avait fait l'objet d'un prix proposé par la Société royale des Sciences de Göttingen, à l'initiative de H.A. Schwarz. L'idée est de déterminer un objet intermédiaire entre f et $S(f)$ et qui, comme $S(f)$ est invariant sous l'action du groupe fondamental de Σ, autrement dit qui est réellement défini sur Σ : il s'agit de l'image inverse par l'application f de la métrique hyperbolique $h = \frac{dwd\overline{w}}{(Im\, w)^2}$ sur $\mathbb{H}$. Cela donne une métrique $g = e^{2u}dzd\overline{z}$ sur Σ où u est une fonction donnée par :

$$e^{2u} = \frac{|f_z|^2}{(Im\, f)^2}. \tag{4}$$

Comme on peut l'anticiper, la courbure de g est constante et égale à 1, ce qui se traduit exactement par la relation (1). L'intérêt est que, sachant (4), on peut calculer le schwarzien de f directement à partir de u :

$$S(f)(z) = 2u_{zz} - 2(u_z)^2 \tag{5}$$

(on peut d'ailleurs vérifier directement que l'expression donnée par (5) est holomorphe dès que u est solution de (1)). Et donc, une fois que l'on a le schwarzien, on automatiquement les bons paramètres accessoires et on peut construire f en résolvant (3).

Ainsi le problème se ramène à prouver l'existence de solutions de (1) avec, en plus la condition qu'au voisinage de chaque point a_j e^{2u} se comporte comme $\frac{1}{r^2 \log^2 r}$, où r est la distance à a_j.

Suit alors l'observation que les solutions de (1) sont les points critiques de l'action

$$\mathcal{L}(u) := \int_\Sigma \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{e^{2u}}{2} \right) dz d\overline{z}, \tag{6}$$

et que par conséquent, si l'on était capable de prouver que l'infimum de cette fonctionnelle est atteint par une fonction régulière, cette fonction régulière serait une solution de (1). Cela était hors de portée à l'époque car les techniques d'analyse fonctionnelle et la théorie de la mesure n'avaient pas encore été suffisament développées.

L'idée de Poincaré était directement inspirée du « principe de Dirichlet ». J.P.G. Lejeune Dirichlet avait proposé une méthode de résolution au problème suivant, qui porte depuis lors son nom : étant donné un domaine Ω de l'espace ou du plan et une fonction g définie sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, il s'agit de trouver un prolongement harmonique u de g à l'intérieur de Ω, c'est à dire une solution de

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u &= g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

La méthode repose sur le fait que les solutions de (7) sont les application qui coïncident avec g sur $\partial\Omega$ et qui sont points critiques de la *fonctionnelle de Dirichlet*

$$E(u) := \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} dx. \tag{8}$$

Il n'est pas très difficile de montrer que, si cette fonctionnelle admet un point critique, alors il est unique et il rend la fonctionnelle *minimale*. A partir de là on peut concevoir une stratégie relativement simple pour prouver l'existence d'une solution à (7), par la minimisation de (8). Cette belle idée avait toutefois du mal à s'imposer : voici ce qu'écrivait D. Hilbert en 1900 dans l'introduction de [31]

« *Le principe de Dirichlet est un mode de raisonnement que ce géomètre, inspiré par une pensée de Gauss, appliqua à la résolution du problème dit aujourd'hui de* Dirichlet *(Randwertaufgabe) [...] C'est en recourant à une considération de cette espèce que Riemann a regardé comme établie la démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet, et qu'il a ensuite, sans hésiter, établi sur cette base sa grandiose théorie des fonctions abeliennes. Ce fut Weierstrass qui montra le premier que ce mode de raisonnement ne peut être validement appliqué ici [...] depuis la critique de Weierstrass le principe de Dirichlet n'a plus qu'un intérêt historique et, comme méthode de résolution de problèmes de Dirichlet, il semble en tout cas délaissé. C'est avec des expressions de regret que M. C. Neumann dit que ce principe de Dirichlet, si beau et si employé autrefois, est maintenant abandonné pour toujours.* »

Mais un peu plus loin Hilbert ajoutait :

« *Ce qui suit est un essai de résurrection du principe de Dirichlet.* »

et montrait l'existence d'une fonction minimisant la fonctionnelle de Dirichlet, résolvant ainsi le problème de Dirichlet. Il prouvait ainsi la validité de ce qu'on appellera la « méthode directe du calcul des variations ». Ainsi 1900 est bien le début d'une résurrection, qui sera suivie d'un triomphe, avec l'obtention en 1936 par J. Douglas de la première médaille Fields[2], pour sa résolution du problème de Plateau.

Le problème de Plateau

Joseph Plateau était un physicien belge qui, à l'aide de très nombreuses expérimentations sur les films de savon, avait établi expérimentalement que pour toute courbe fermée dans l'espace, il existait une surface d'aire minimale s'appuyant sur ce contour (et précisément matérialisée par un film de savon). Plateau avait également décrit et classé toutes les singularités des films de savon d'aire minimale [49]. La démonstration mathématique des conjectures et des principes expérimentaux de Plateau était dès la fin du dix-neuvième siècle un des plus grands défis posés au mathématicien. Le problème de Plateau consistait à démontrer le résultat suivant : *étant donnée une courbe fermée connexe (de Jordan) dans l'espace euclidien de dimension trois, il existe une surface minimale (c'est à dire en fait à courbure moyenne nulle partout), régulière et ayant la topologie d'un disque dont le bord est la courbe fermée.*

En 1902, deux ans après la « résurrection », H. Lebesgue publia sa thèse [38] dont le titre était tout simplement « *Intégrale, Longueur, Aire* » et dans laquelle il présentait les bases de sa théorie de l'intégration. Le dernier chapitre y était consacré à la recherche d'une solution au problème de Plateau par la mise en œuvre de la méthode directe de Hilbert à ce problème. Il parvint à montrer l'existence d'un minimum, mais buta sur la question de la régularité de sa solution. Lebesgue écrivit :

« *Les résultats obtenus par Mr. Hilbert et ceux [de la thèse de Lebesgue] si incomplets qu'ils soient, semblent montrer qu'il y a avantage à laisser de côté, au moins momentanément, les équations aux dérivées partielles que donnent les méthodes ordinaires du calcul des variations, et à raisonner directement sur l'intégrale qu'il s'agit de rendre minima.* »

L'idée exprimée ici annonçait le développement d'une grande partie de l'analyse au cours du vingtième siècle. Toutefois la partie était loin d'être gagnée et G. Darboux écrivait en 1914, à propos du problème de Plateau dans [12] :

« *L'Analyse mathématique n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question.* »

[2] en même temps que Lars Ahlfors

Dans le même ouvrage Darboux poursuivait une autre démarche pour résoudre le problème de Plateau, qui avait été initiée par B. Riemann, K. Weierstrass et H.A. Schwarz. L'idée reposait sur la représentation de Weierstrass de toute immersion conforme X dont l'image est une surface minimale :

$$X(z) = \mathrm{Re}\left(\int_{z_0}^{z} \left(i(G^2 - H^2), G^2 + H^2, 2iGH\right) dt\right),$$

où G et H sont deux fonctions analytiques de la variable complexe t. Cette formule miraculeuse donne une description locale très simple des surfaces minimales. En revanche son usage pour tenter de résoudre le problème de Plateau n'est pas aisé parce qu'il est très difficile de trouver les conditions sur les « données de Weierstrass » F et G de façon à garantir que le bord de la surface coïncide avec une courbe que l'on s'est donnée à l'avance. Néanmoins Riemann et Schwarz avaient réussi à résoudre le problème dans certains cas où le contour est un polygône assez simple et possédant des symétries. Ultérieurement, Weierstrass, puis Darboux cherchèrent à étendre cette méthode pour des contours polygonaux avec un nombre arbitraire de côtés, sans toutefois pouvoir compléter leurs constructions[3].

Ce fut René Garnier [23] qui, en 1928, réussit à résoudre les difficultés qui avaient bloqué Darboux et, ce faisant, à résoudre le problème de Plateau pour un contour polygonal assez général. Sa preuve utilise la méthode de G.D. Birkhoff pour résoudre le problème de Riemann (que Garnier avait lui-même perfectionnée l'année précédente). Et de plus, Garnier fut capable de passer à la limite pour une suite de contours polygonaux tendant vers une courbe continue (mais non nouée). Bien que sa preuve fut compliquée et que son résultat ne donnait pas tout à fait une solution complète du problème de Plateau, le travail de Garnier confirmait les espoirs de Darboux. Cependant à la même époque, l'approche par le calcul des variations était l'objet d'une intense activité : A. Haar [29] publia presque en même temps que Garnier une autre solution partielle du problème de Plateau, utilisant la méthode directe de Hilbert. Et finalement à la fin des années 1920 deux démonstrations du problème de Plateau furent obtenues indépendamment par Tibor Radó [54] et Jesse Douglas [15]. La preuve de Radó repose, comme celle de Garnier, sur la résolution d'un problème où le contour est approché par un polygône, mais où la solution approchée à l'intérieur est elle-même approchée par une surface polyèdrale, construite à l'aide d'immersions harmoniques, et seulement *approximativement* conformes. Ce faisant il n'utilisait plus la représentation de Weierstrass mais déjà la solution du problème de Dirichlet. Celle de Douglas repose sur la « méthode directe ». Mais au lieu de chercher l'immersion u qui minimise la fonctionnelle aire $A[u] := \int_D |\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}| dxdy$, Douglas utilisa la fonctionnelle de Dirichlet (8), avec la condition que, sur le bord du disque D, u paramétrise le contour fixé dans l'espace. Le miracle est que le minimiseur est automatiquement conforme et donc que son image est aussi d'aire minimale. La preuve de Douglas surprit par sa simplicité

[3]il est intéressant de noter que la méthode repose sur l'utilisation d'une équation différentielle du second ordre qui a pour solution les données F et G, selon une démarche analogue à celle de Poincaré lorsqu'il étudiait les équations fuchsiennes

(et elle sera l'objet de simplifications supplémentaires par R. Courant et L. Tonelli en 1936). Elle permit également des généralisations jugées hors de portée quelques années auparavant, puisque Douglas obtint un peu plus tard l'existence de surfaces minimales de genre supérieur ou égal à 1 en sous certaines hypothèses. L'idée fondamentale de Douglas est essentiellement la même que celle du physicen A.M. Polyakov [51] qui, beaucoup plus tard, proposa de remplacer la fonctionnelle $A[u]$ (que les physiciens appelent *action de Nambu–Goto*) par la fonctionnelle énergie $E[u]$ dans la théorie des cordes.

Avec les résultats de Douglas et de Radó[4], l'histoire du problème de Plateau ne s'arrête pas, mais ne fait que commencer. D'abord la surface construite par Douglas était *généralisée*, au sens où on ne pouvait pas exclure qu'elle ait des singularités ponctuelles. Il fallut attendre 1960 pour que E.R. Reifenberg [55] démontre l'existence d'une surface *régulière*, solution du problème de Plateau. Mais cette fois-ci la surface n'était pas *nécessairement connexe et orientée* (et donc en particulier n'avait pas le type topologique d'un disque). Le travail de Reifenberg est contemporain d'un article de H. Federer et W.H. Fleming [19] et ces deux contributions participent à l'élaboration de la *théorie de la mesure géométrique*. D'une certaine façon cette théorie reprend le projet conçu par Lebesgue au début du siècle dans un cadre beaucoup plus ambitieux : l'objectif est d'étudier des sous-variétés minimales de dimension arbitraire dans des espaces de dimension arbitraire, ou des variétés riemanniennes[5], sans avoir à utiliser nécessairement de paramétrisations locales (mais plutôt en voyant une sous-variété comme un courant au sens de de Rham [11]). A la suite le développement de la théorie de la mesure géométrique et de ses applications à la théorie des surfaces et des sous-variétés minimales a été considérable.

En 1962, Fleming [20] démontra un résultat analogue à celui de Reifenberg, tout en étant capable de prouver que la surface minimale obtenue est *orientable*. En 1968 J. Simons [61] montra que les surfaces minimales dans un espace de dimension n n'ont pas de singularités pour $n \leq 7$. Ce résultat est optimal comme l'ont démontré E. Bombieri, E. de Giorgi et E. Giusti [8] en 1969 en exhibant un exemple de cone minimal singulier vivant dans $\mathbb{R}^8$. Enfin il fallut attendre le début des années 1970, avec les travaux de R. Osserman [44], R. Gulliver [27] et R. Osserman, R. Gulliver et H.L. Royden [28], pour obtenir l'existence d'une solution au problème de Plateau qui soit *simplement connexe* et *régulière*. Bien entendu nous ne pouvons pas raconter ici tous les développements qui ont accompagné et suivi ces découvertes et nous renvoyons le Lecteur à [45], [22], [13], [43] pour des ouvrages d'exposition et au texte de P. Dolbeault dans ce volume pour la version complexe de ce problème (on trouvera également une excellente présentation, accessible à un public de non mathématiciens, dans le livre [32]).

Le problème de Weyl

[4]Une troisième solution au problème de Plateau fut obtenue en 1933 par J. McShane [39], utilisant l'approche de Lebesgue

[5]le problème de Plateau pour les surfaces dans une variété riemannienne avait été résolu par C.B. Morrey en 1948 [41]

Un autre problème classique a joué un rôle important : il s'agit de savoir si, étant donnée une métrique g sur la sphère S^2, à courbure K positive, il existe un plongement isométrique dans l'espace $\mathbb{R}^3$, dont l'image est convexe. Ce problème avait été partiellement résolu par H. Weyl en 1916 [67] dans le cas où la courbure K est strictement positive. Sa preuve, qui repose sur des arguments purement analytiques (méthode de continuité) a été complétée beaucoup plus tard par L. Nirenberg en 1953 [42]. Une autre approche, plus géométrique, a été initiée par A.D. Alexandrov [2] et repose sur une approximation de la surface par des polyèdres. Ce dernier travail a, lui aussi, été complété par des résultats de régularité de A.V. Pogorelov [50] et I.H. Sabitov [56].

Le cas où la courbure K est seulement positive ou nulle et, a fortiori, le cas où K change de signe est redoutablement plus difficile. Nous renvoyons à [69] pour un exposé succinct de résultats récents. A posteriori un intérêt historique du problème de Weyl (et d'une de ses variantes, appelée problème de Minkowski) est qu'il a suscité des progrès très importants sur l'équation de Monge–Ampère

$$\det(\nabla^2 u) = f(x, u, \nabla u). \tag{9}$$

Deux stratégies ont été développées en parallèle pour cette équation : la méthode de continuité, qui nécessite des estimations a priori souvent difficiles et des méthodes géométriques. Il est intéressant ici de noter les interactions entre les deux points de vue. Ainsi les idées d'Alexandrov[6] sont à l'origine d'estimations sur une grande classe d'équations elliptiques, aujourd'hui devenu partie intégrante de l'arsenal des spécialistes de équations aux dérivées partielles elliptiques.

Nous avons jusqu'ici évoqué quelques thèmes qui ont joué un rôle déterminant dans la conception et la consolidation d'une partie de techniques d'analyse au vingtième siècle, surtout jusqu'à la fin des années soixante. Il faudrait également y inclure le problème du plongement isométrique des variétés riemanniennes, pour lequel J. Nash a forgé, entre autre, sa technique de point fixe « dure » (voir le texte de A. Zeghib dans ce volume).

Un survol rapide de quelques résultats des trente dernières années

Rétrospectivement la période que nous avons évoquée jusqu'ici (de Poincaré au début des années 1970) aura été un prélude à l'explosion de résultats qui a suivi et qui devrait

[6] une technique d'estimation, due à Alexandrov [3], consiste à utiliser les propriétés de convexité de l'enveloppe convexe d'une fonction en utilisant de façon habile sa transformée de Legendre (cf. [25], Chap. 9.1, [9]).

Une autre méthode, dite du « plan mobile », a été inventée par Alexandrov [4] pour prouver que toute surface compacte sans bord à courbure moyenne constante plongée dans $\mathbb{R}^3$ est une sphère. Après avoir été développée par J. Serrin [60], B. Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg [24] et H. Berestycki et L. Nirenberg [7], elle devenue un outil essentiel pour prouver l'unicité de certaines solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques.

faire l'objet d'un texte beaucoup plus long. Par exemple si nous revenons à une des questions évoquées au début, à savoir l'uniformisation des surfaces (finalement résolue par P. Koebe [37] entre 1909 et 1914), c'est seulement durant les trentes dernières décennies que des résultats significatifs sur des généralisations en dimension supérieure à deux ont été obtenus. Ces généralisations sont multiples (voir aussi le texte de M. Berger dans cet ouvrage) :

- prescrire la courbure scalaire dans une classe conforme de métrique sur une variété. C'est le problème de H. Yamabe [68], considéré par N.S. Trudinger [63]. Il fallut attendre 1976 pour avoir une première démonstration correcte par T. Aubin [5] dans le cas où la dimension est supérieure ou égale à 6 et la variété n'est pas localement conformément plate (le cas où cela n'est pas vérifié a été démontré par R. Schoen ultérieurement en utilisant la preuve de la conjecture de la masse positive [58]). Les méthodes utilisées ici sont variationnelles.
- construire une métrique d'Einstein ($R_{\mu\nu} = cg_{\mu\nu}$) sur une variété. Ce problème formidable n'a toujours pas de solution générale. Une simplification possible est de supposer que la variété est complexe kählerienne : c'est l'approche imaginée par E. Calabi [10]. Ce problème fut résolue en 1978 par T. Aubin [6] et S.T. Yau [69] indépendamment. La solution repose sur l'étude d'une équation de Monge–Ampère complexe.
- une autre approche pour essayer de construire une métrique d'Einstein est d'utiliser une équation de type chaleur ($\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = -2R_{\mu\nu}$) pour tenter de déformer continument une métrique quelconque en une métrique d'Einstein. Ce programme a été initié par R. Hamilton [30], dans l'ambition de répondre positivement à la conjecture de Poincaré et de compléter le programme d'uniformisation de Thurston (voir le texte de V. Poenaru dans ce livre). Certaines difficultés sur lesquelles R. Hamilton avait buté, semblent avoir été débloquées au début du vingt-et-unième siècle par G. Perelman [46].

Citons rapidement deux autres problématiques où l'analyse a apporté des contributions essentielles :

- la construction d'applications spéciales entre variétés avec des contraintes topologiques. Un des premiers résultats généraux de ce type est la construction en 1964 par J. Eells et J.H. Sampson [16] d'une application harmonique dans une classe d'homotopie d'applications entre deux variétés riemaniennes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}$ est à courbure négative. La méthode utilise (bien avant le travail de Hamilton) une équation de la chaleur pour les applications entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Le cas où $\mathcal{N}$ n'est plus à courbure négative est plus difficile (et beaucoup de propriétés satisfaites si la courbure de $\mathcal{N}$ est négative cessent d'être vraies si la courbure de $\mathcal{N}$ est autorisée à être positive). Cela a pu être réalisé, sous certaines hypothèses, lorsque $\mathcal{M}$ est une sphère de dimension deux, par J. Sacks et K. Uhlenbeck [57], en utilisant une approche variationnelle. Une variante de ce dernier résultat, pour des courbes pseudo holomorphes dans une variété symplectique a été inventée et développée par M. Gromov [26] et a donné lieu à quantité d'applications géométriques.

– la théorie de S. Donaldson. Nous renvoyons à [21] pour un exposé complet de ce sujet. En effet, outre le fait qu'elle utilise des résultats de topologie profonds, dûs à M. Freedman, cette théorie repose sur une analyse difficile des solutions (anti)autoduales des équations de Yang–Mills pour les connexions sur une variété de dimension 4 (résultats de C. Taubes [62], K. Uhlenbeck [64] et S. Donaldson [14]).

En guise de conclusion

Nous avons vu qu'au cours du siècle passé les méthodes d'analyse abstraites (calcul des variations, méthodes de continuité, d'inversions locales...) se sont peu à peu imposé, en supplantant toute une tradition, dont Garnier semble avoir été l'un des derniers représentants. Le Lecteur pourra par exemple se référer au texte [70] pour avoir d'avantage d'informations sur les innombrables applications des méthodes d'analyse modernes à la géométrie et également sur toutes les questions qui restent ouvertes. Il est intéressant de remarquer que souvent les réponses apportées par l'analyse reposent sur des théorèmes très difficiles et dont les preuves ne répondent plus nécessairement à l'idéal de transparence auquel aspirent certains géomètres, et que par conséquent la satisfaction de connaître la réponse à une question fondamentale se mêle à une certaine frustation. Cependant il serait dommage d'enterrer définitivement les méthodes géométriques reposant sur des calculs « explicites », tout comme il aurait été dommage de condamner le principe de Dirichlet il y a un siècle. Ainsi les équations manipulées par Garnier sont-elles très proches des équations de Schlesinger, qui contistuent une classe importante de systèmes intégrables, récemment généralisée par N. Hitchin [33]. Les systèmes intégrables, dont nous n'avons pas du tout parlé ici, sont sans aucun doute appelés à jouer un rôle de plus en plus important en géométrie (et dans la théorie des cordes). C'est l'occasion de renouer connaissance avec par exemple la somme de connaissances thésaurisée dans le traité de géométrie de Darboux (tout en la dépassant).

A ce sujet une histoire frappante est celle du problème de H. Hopf : pendant longtemps (essentiellement entre 1950 et 1984) on a cru et on a cherché à démontrer qu'il n'existait pas d'autres surfaces compactes, sans bord, à courbure moyenne constante, immergées dans $\mathbb{R}^3$ que les sphères rondes ; jusqu'à ce que H. Wente [66] contruise (par des arguments d'analyse) un tore immergé à courbure moyenne constante. En mettant fin à une conviction erronée, ce résultat a suscité de nombreux travaux qui exploitent le fait que ces surfaces sont solutions d'un système complètement intégrable, et ont permis notament d'aboutir à une classification de tous les tores à courbure moyenne constante [47]. Or il se trouve qu'une de ces surfaces avait été construite en 1883 par M. Voretzsch [65], un étudiant de A. Enneper [18], grâce à des fonctions elliptiques[7]. La différence est qu'à l'époque d'Enneper, on cherchait à décrire des solutions explicitement, mais on ne posait pas la

[7]ironiquement, il se trouve qu'à l'époque où Wente travaillait à la preuve de son résultat, Wente avait consulté le livre d'Eisenhardt [17] et il avait manqué de peu la page où se trouvait la réponse à la question qu'il se posait. La solution décrite dans ce livre est essentiellement la même que celle construite par U. Abresch en 1987 [1], après une simulation sur ordinateur, voir [40].

question de savoir si les surfaces pouvaient se refermer et former un tore (un point qui n'est pas évident et qui a été prouvé en 1987 seulement [1]). Ainsi parfois la géométrie différentielle ancienne rattrape les méthodes d'analyse modernes de façon inattendue. Mais en revanche, pour l'instant, la seule méthode connue pour fabriquer des surfaces à courbure moyenne constante de genre plus grand ou égal à deux est due à N. Kapouleas [36], par une technique de « recollement », une application difficile des théorèmes d'inversion locale.

Enfin, et cela ne fait qu'étayer les idées exposées dans le texte de M. Atiyah dans ce volume, nous voyons que la physique continue à jouer un rôle capital pour apporter de nouvelles idées. Par exemple nous savons que la théorie de Donaldson a été révolutionnée par les travaux de N. Seiberg et E. Witten [59] et les travaux spectaculaires de M. Kontsevich s'inspirent d'idées heuristiques de la théorie quantiques des champs et de la théorie des cordes. Ainsi les termes employés par Poincaré : « *avant de démontrer, par des procédés rigoureux, [...], je veux d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus [...] dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique* » sont toujours d'actualité.

Références

[1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. reine angew. Math. 374 (1987), 169–192.

[2] A.D. Alexandrov, *Intrinsic geometry of convex surfaces*, OGIZ Moscow, 1948.

[3] A.D. Alexandrov, *General methods for majorizing the solutions of the Dirichlet problems*, Sib. Math. J. 7 (1966), 394–403.

[4] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorem for surfaces in the large*, Vestnik Leningrad Univ. Math. 11 (1956), 5–17.

[5] T. Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Maths. Pures et App. 55 (1976), 269–296.

[6] T. Aubin, *Equations de Monge–Ampère sur les variétés kähleriennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris 283A (1976), 119 ; Bull. Sci. Math. 102 (1978), 63–95.

[7] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Bars. Mat. 22 (1991), 1–39.

[8] E. Bombieri, E. de Giorgi, E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. 7 (1969), 243–268.

[9] X. Cabre, L. Cafarelli, *Fully nonlinear elliptic equations*, AMS Colloquium Pub. 43, 1995.

[10] E. Calabi, *The space of Kähler metrics*, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam 2 (1954), 206–207.

[11] G. de Rham, *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Act. Sci. et Ind. 1222, Hermann, Paris 1955.

[12] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, première partie, Livre 3, Chapitre X, Gauthier–Villars, 1914.

[13] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces I, II*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] S.K. Donaldson, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geo. 18 (1983), 269–316.

[15] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931).

[16] J. Eells, J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. of Maths. 86 (1964), 109–160.

[17] L.P. Eisenhardt, *A treatise on the differential of curves and surfaces*, Dover Pub. Inc. New York 1909.

[18] A. Enneper, *Über die Flächen mit einem System sphärischen Krümmungslinien*, J. reine angew. Math. 94 (1883), 329–341.

[19] H. Federer, W.H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. Math. 72 1960, (458–520).

[20] W.H. Fleming, *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 11 (1962), 69–90.

[21] D. Freed, K. Uhlenbeck, *Instantons and four-manifolds*, MSRI publications, Springer-Verlag, 1984.

[22] A.T. Fomenko, A.A. Tuzhilin, *Element of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*, Translations of Mathematical Monographs, AMS 1991.

[23] R. Garnier, *Le problème de Plateau*, Annales Ecole Norm. (3) 45 (1928), 53–144.

[24] B. Gidas, W.M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the marximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209–243.

[25] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer Verlag, 1983.

[26] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Math. 82 (1985), 307–347.

[27] R. Gulliver, *Regularity of surfaces of precribed mean curvature*, Ann. Math. 97 (1973), 275–305.

[28] R. Gulliver, R. Osserman, H.L. Royden, *A theory of branched immersion of surfaces*, Amer. J. Math. 95 (1973), 750–812.

[29] A. Haar, *Uber das Plateausche Problem*, Math. Annalen t. 97 (1927), 124–158.

[30] R.S. Hamilton, *Three manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geo. 17 (1982), 255–306.

[31] D. Hilbert, *Sur le principe de Dirichlet*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 3ème série, 19 (1900), p. 337.

[32] S. Hildebrandt, T. Tromba, *The parcimonious universe : Shape and form in the natural world*, Copernicus Book, 1996.

[33] N. Hitchin, *Geometrical aspects of Schlesinger's equation*, J. Geom. Phys. 23, no. 3-4 (1997), 287–300.

[34] F. Klein, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktiontheorie*, Math. Ann. 21 (1883), 201–312.

[35] J.-P. Kahane, *Séries trigonométriques*, Encyclopaedia Universalis.

[36] N. Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean threespace*, J. Diff. Geo. 33 (1991), 683–715.

[37] P. Koebe, *Über die Uniformisierung des algebraischen Kurven, I, II, III, IV*, Math. Ann. *I* : 67 (1909), 145–224 ; *II* : 69 (1910), 1–81 ; *III* : 72 (1912), 427–516 ; *IV* : 75 (1914), 42–129.

[38] H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di Matematica (3) 7 (1902).

[39] J. McShane, *Parametrization of saddle surfaces with applications to the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933).

[40] M. Melko, I. Sterling, *Integrable systems, harmonic maps and the classical theory of solitons*, in *Harmonic maps and integrable systems*, A. Fordy, J.C. Wood, ed., disponible sur http ://www.amsta.leeds.ac.uk/Pure/staff/wood/FordyWood/contents.html

[41] C.B. Morrey, *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*, Ann. Math. (2) 49 (1948), 807–851.

[42] L. Nirenberg , *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337–394.

[43] J. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[44] R. Osserman, *A proof of the regularity erverywhere of the classical solution to the Plateau's problem*, Ann. Math. 91 (1970), 550–569.

[45] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, new edition, Dover 1986.

[46] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv :math.DG/0211159.

[47] U. Pinkall, I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. Maths. 130 (1989), 407–451.

[48] E. Picard, *Théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. de Mathématiques Pures et Appl. (4), t. VI (1890), 145–210 (et *Rectificatif*, page 231).

[49] J. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier–Villars, 1873.

[50] A.V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monographs, Vol. 35, AMS, 1973.

[51] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. 103B (1981), 207–211.

[52] H. Poincaré, *Les groupes de équations linéaires*, Acta Math., t. 4 (1884), 201–311.

[53] H. Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'équation* $\Delta u = e^u$, J. de Mathématiques, 5è série, t. 4 (1889), 137–230.

[54] T. Radó, *On Plateau's problem*, Ann. of Math. (2) 31 (1930), 457–469.

[55] E.R. Reifenberg, *Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type*, Acta Math. 104 (1960), 1–92.

[56] I.H. Sabitov, *Regularity of convex surfaces with a metric that is regular in Hölder classes*, Sib. Math. Mech. 11 (1962), 929–939.

[57] J. Sacks, K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. Maths. 113 (1981), 1–24.

[58] R. Schoen, S.T. Yau, *Proof of the positive mass theorem II*, Comm. Math. Phys. 79 (1981), 231–260.

[59] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B426 (1994), 19–52 ; B431 (1994), 484–550.

[60] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.

[61] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. Math. 88 (1968), 62–105.

[62] C. Taubes, *Self-dual Yang–Mills conections on non self-dual 4-manifolds*, J. Diff. Geo. 17 (1982), 139–170.

[63] N.S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 265–274.

[64] K. Uhlenbeck, *Connections with* L^p *bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31–42.

[65] M. Voretzsch, *Untersuchung einer speziellen Fläche constanter mittlerer Krümung bei welcher die eine des beiden Schaaren der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wirdt*, thèse de l'Université de Göttingen, 1883.

[66] H. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. 121 (1986), 193–243.

[67] H. Weyl, *Über die Bestimmung einer geschlossen konvexenfläche durch ihr Linienelement*, Vierteljahrschrift Naturforsch. Gesell. Zürich, 61 (1916), 40–72.

[68] H. Yamabe, *On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960), 21–37.

[69] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.

[70] S.T. Yau, *Review of geometry and analysis*, in *Mathematics : frontiers and perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, ed., AMS 2000.