Université Paris 7, Master 1 de Mathématiques Année 2012-1013

Examen du 25 février 2013

Durée : 3 heures. Les notes de cours sont autorisées.

1) On note $V := \mathbb{R}^4$. On dit qu'une 2-forme $\beta \in \Lambda^2 V^*$ est *décomposable* si il existe deux 1-formes $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ telles que $\beta = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.

(i) Montrer que toute 2-forme décomposable est solution de l'équation $\beta \wedge \beta = 0$;

(ii) Trouver un exemple de 2-forme sur V qui n'est pas décomposable (ou pourra noter $(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ une base de V^*) ;

(iii) Montrer la réciproque du résultat de la première question, c'est à dire : toute 2-forme β telle que $\beta \wedge \beta = 0$ est décomposable (on pourra, dans le cas où $\beta \neq 0$, commencer par prouver l'existence de deux vecteurs $v, w \in V$ tels que $v \lrcorner (w \lrcorner \beta) \neq 0$).

1 Equations de Monge–Ampère

On considère l'espace $J^1(U, \mathbb{R})$, muni des coordonnées (x^1, x^2, y, p_1, p_2) et de la 1-forme de contact $\theta := dy - p_1 dx^1 - p_2 dx^2$. On note $\Omega := dx^1 \wedge dx^2$. On rappelle que, si U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, l'application $j^1 f : U \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est définie par $j^1 f(x) = \left(x^1, x^2, f(x), \frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x)\right)$. On se donne des fonctions $a, b^{11}, b^{12}, b^{21}, b^{22}, c \in \mathcal{C}^\infty(J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ et on considère la 2-forme définie sur $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par :

$$\omega = a dx^1 \wedge dx^2 + \sum_{a=1}^{2} b^{1a} dp_a \wedge dx^2 + \sum_{a=1}^{2} b^{2a} dx^1 \wedge dp_a + c dp_1 \wedge dp_2. \tag{1}$$

(i) Comment peut-on caractériser localement les surfaces orientées $\Sigma \subset J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui sont solutions de $\theta|_\Sigma = 0$ et $\Omega|_\Sigma \neq 0$?

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Calculer $(j^1 f)^* \omega$ et montrer que $(j^1 f)^* \omega = 0$ si et seulement si f est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on explicitera. (Suggestion : étudier d'abord les cas correspondant aux questions (v) et (vi)) ;

(iii) Montrer que, localement, les solutions Σ du système différentiel extérieur

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega|_\Sigma & = & 0 \\ \theta|_\Sigma & = & 0 \\ \Omega|_\Sigma & \neq & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

correspondent aux solutions d'une équation aux dérivées partielles (EDP) que l'on explicitera.

(iv) Soit $T : J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ le difféomorphisme défini par

$$T(x^1, x^2, y, p_1, p_2) = (-p_1, x^2, y - p_1 x^1, x^1, p_2).$$

et soit $\omega_2 := dp_1 \wedge dp_2 - dx^1 \wedge dx^2$. Calculer $\omega_1 := T^* \omega_2$.

(v) Soit V_2 un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Caractériser par une EDP les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty(V_2)$ telles que $(j^1 g)^* \omega_2 = 0$.

(vi) Soit V_1 un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Caractériser par une EDP les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(V_1)$ telles que $(j^1 f)^* \omega_1 = 0$.

(vii) Montrer que $T^* \theta = \theta$ et calculer $T^* \Omega$.

(viii) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Pour tout ouvert $V_1 \subset U$, on note $\Sigma_1 := (j^1 f)(V_1)$ et $\Sigma_2 := T(\Sigma_1)$. Montrer que, si $\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} \neq 0$, alors $\forall x \in U$, il existe un voisinage ouvert $V_1 \subset U$ de x, un ouvert $V_2 \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(V_2)$ tels que

$$\Sigma_2 = (j^1 g)(V_2).$$

(ix) Montrer que, *localement et sous certaines hypothèses*, les deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial^2 g}{(\partial x^2)^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^1}\right)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \Delta f = 0$$

sont équivalentes via un changement de variable.

(x) On s'intéresse dorénavant au système différentiel extérieur $\omega_2|_\Sigma = 0$, $\theta|_\Sigma = 0$ et $\Omega|_\Sigma \neq 0$. Ce système est-il fermé ? Sinon, expliciter un système fermé (qu'on notera (S)) qui admet les mêmes solutions.

(xi) En tout point $\mathrm{M} \in J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note $Gr_{2,\mathrm{M}}^{(S)}$ le sous-ensemble de la variété grassmanienne $Gr_{2,\mathrm{M}}$ des plans orientés E_2 contenus dans $T_\mathrm{M} J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tels que $\Omega|_{E_2} > 0$ et qui sont solutions du système différentiel extérieur (S). Calculer la dimension $r_{(1)}$ de $Gr_{2,\mathrm{M}}^{(S)}$.

(xii) Calculer les caractères réduits s_0' et s_1' pour les systèmes polaires réduits correspondant à un élément $E_2 \in Gr_{2,\mathrm{M}}^{(S)}$.

(xiii) Faire le test de Cartan pour ce système et conclure.

2 Equation de Burgers

On se donne une fonction $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et on considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + V'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

où l'inconnue est une fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$) et à valeurs réelles. L'espace des 1-jets $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est muni des coordoonées (x^0, x^1, y, p_0, p_1) et de la forme de contact $\theta = dy - p_0 dx^0 - p_1 dx^1$. On définit la fonction $F : J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F(x, y, p) = p_0 + p_1 V'(y)$. Pour tout ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ et pour toute fonction $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $j^1 u$ la fonction définie par $j^1 u(x^0, x^1) = (x^0, x^1, u(x^0, x^1), \frac{\partial u}{\partial x^0}, \frac{\partial u}{\partial x^0})$ et $\Gamma_u := j^1 u(U) \subset J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(i) Montrer que l'équation (3) peut se formuler localement sous la forme d'un système différentiel extérieur faisant intervenir les formes θ, $dx^0 \wedge dx^1$ et la fonction F. Expliciter ce système sous une forme *fermée.*

(ii) Expliciter le champ de vecteur de Charpit–Lagrange

$$X := \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + p_\mu \frac{\partial F}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} + p_\mu \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial p_\mu}.$$

Vérifier que $dF(X) = X \lrcorner \theta = 0$ et calculer $X \lrcorner d\theta$.

(iii) On note $\Sigma := \{(0, x^1, y, p_0, p_1) \in J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\} = \{x^0 = 0\}$ et $\Sigma^F := \Sigma \cap F^{-1}(0)$. Pour tout point $(0, x, y, p_0, p_1) \in \Sigma^F$, on note $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ la solution de l'équation $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$ satisfaisant la condition initiale $\gamma(0) = (0, x, y, p_0, p_1)$. On écrira $\gamma = (\xi, \xi^1, \eta, \pi_0, \pi_1)$ dans les calculs. Déterminer γ *dans le cas où* $(0, x, y, p_0, p_1) \in \Sigma^F$*, i.e.* $F(0, x, y, p_0, p_1) = 0$*, uniquement.* Pour trouver π_0 et π_1, on pourra commencer par chercher des équations satisfaites par $\frac{1}{\pi_1}$ et $\frac{\pi_0}{\pi_1}$.

(iv) Déduire de la question précédente l'expression de l'application définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \Sigma^F$ (muni des coordonnées $(t; x, y, p_0, p_1)$) et à valeurs dans $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par les conditions : $\varphi(0; x, y, p_0, p_1) = (0, x, y, p_0, p_1)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi)$. Que peut-on dire sur U ?

(v) Calculer $\varphi^* \theta$ et démontrer que cette 1-forme est égale au produit d'une fonction qui ne s'annule pas sur U par une 1-forme θ_1 telle que $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \theta_1 = L_{\frac{\partial}{\partial t}} \theta_1 = 0$.

(vi) Déterminer les surfaces orientées $\Gamma \subset F^{-1}(0)$ qui rencontrent transversalement Σ et qui sont solutions de $dx^0 \wedge dx^1|_\Gamma \neq 0$ et $\theta|_\Gamma = 0$.

(vii) Décrire les solutions u de l'équation (3) satisfaisant la condition initiale $u(0, x^1) = f(x^1)$, où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On pourra s'aider d'une figure représentant sur le plan (x^0, x^1) les images des caractéristiques.