Exercices sur le calcul différentiel extérieur

1 Produit extérieur

Sur $\mathbb{R}^3$ on définit la 2-forme différentielle α et la 1-forme différentielle β par : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_{(x,y,z)} := xydx \wedge dy + z^2 dx \wedge dz + xdy \wedge dz \quad \text{et} \quad \beta_{(x,y,z)} := xdx + y^2 dz.$$

Calculer $\alpha \wedge \beta$, $d\alpha$, $d\beta$ et $\beta(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$.

2 Produit intérieur

Pour toute p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et pour tout vecteur $X \in V$, on note $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$ et on appelle *produit intérieur de α par X* la $(p-1)$-forme définie par

$$\forall X_2, \cdots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \cdots, X_p) = \alpha(X, X_2, \cdots, X_p).$$

1 — On suppose que V est de dimension n. On se donne $\omega \in \Lambda^n V^*$ non nulle. Démontrer (sans calcul) que l'application

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \longrightarrow & \Lambda^{n-1}V^* \\ & X & \longmapsto & X \lrcorner \omega \end{array}$$

est un isomorphisme. Question : à quoi revient le choix d'une telle forme ω ?
2 — On suppose que V est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Démontrer que

$$\begin{array}{rccc} \ell: & V & \longrightarrow & \Lambda^1 V^* \\ & X & \longmapsto & \langle X, \cdot \rangle \end{array}$$

est un isomorphisme.
3 — On suppose que V est de dimension 3, est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et est orienté. On considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de V et $\omega \in \Lambda^3 V^*$ telle que $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1$. Exprimer l'application

$$\begin{array}{ccc} V^2 & \longrightarrow & V \\ (X, Y) & \longmapsto & \lambda^{-1}(\ell(X) \wedge \ell(Y)) \end{array}$$

dans les coordonnées données par (e_1, e_2, e_3). Conclure.

3 Produit extérieur

On pose $V = \mathbb{R}^n$. Soit $\alpha, \beta \in \Lambda^2 V^*$. Etudier dans les cas suivants si $\alpha \wedge \beta$ est nul ou non :
1 — $n = 3$.
2 — $n = 4$.

4 Produit extérieur et produit intérieur

Dans ce problème $\alpha \in V^*$ est une 1-forme et $\gamma \in \Lambda^2 V^*$ est une 2-forme.
a) Montrer que $\forall u, v, w \in V$ l'expression $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$ peut se simplifier comme la somme de trois termes.
b) Soit $\alpha \in V^*$ une 1-forme *non nulle*. On note H le noyau de α. Montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $\alpha(u) = 1$. Ce vecteur u est-il unique ?
c) On suppose dans cette question et dans la suite que $\alpha \wedge \gamma = 0$. Montrer que la restriction de γ à H est nulle (i.e. $\forall v, w \in H$, $\gamma(v, w) = 0$).
d) On note $\beta = u \lrcorner \gamma$, où u a été introduit à la question b). Montrer que $\gamma = \alpha \wedge \beta$.

5 Le lemme de Cartan : première version

Démontrer, en utilisant des coordonnées locales, que, sur une variété $\mathcal{M}$, pour tout champ de vecteur X et Y sur $\mathcal{M}$ et pour toute 1-forme différentielle α sur $\mathcal{M}$,

$$d\alpha(X,Y) = L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]). \tag{1}$$

6 Le lemme de Cartan : deuxième version

On se propose de redémontrer la formule (1) de l'exercice précédent de façon intrinsèque.
1) Démontrer (1) dans le cas où $\alpha = df$, avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$.
2) On suppose que $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ satisfait (1). Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\alpha := g\beta$ satisfait aussi (1).
3) Montrer (1) dans le cas général.

7 Transport par un difféomorphisme d'un produit intérieur et d'une dérivée de Lie

Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un difféomorphisme, $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur sur $\mathcal{M}$ et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ une p-forme sur $\mathcal{N}$. On note $X := \varphi_*\xi$.
1) Démontrer que $\varphi^*(X \lrcorner\, \alpha) = \xi \lrcorner\, (\varphi^*\alpha)$.
2) Démontrer que $\varphi^*(L_X\alpha) = L_\xi(\varphi^*\alpha)$.

8 Forme symplectique

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ est muni des coordonnées $(x,p) = (x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n) = (x^i, p_i)_i$ et on note

$$\omega := dp_1 \wedge dx^1 + \cdots + dp_n \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

1) Montrer que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ il existe un unique champ de vecteur ξ su $\mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\xi \lrcorner\, \omega + dh = 0.$$

Expliciter ce champ de vecteur. Dans la suite on notera ξ_h ce champ de vecteur.
2) Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est solution de :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma) \quad \text{alors} \quad \frac{d(h\circ\gamma)}{dt} = 0.$$

3) Pour toute paire de fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on note :

$$\{f,g\} := \omega(\xi_f, \xi_g)$$

(crochet de Poisson). Montrer que si $\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$ alors

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \{h,f\}\circ\gamma$$

et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
4) Expliciter $\{f,g\}$.
5) Montrer que

$$L_{\xi_f}\omega = 0.$$

6) On rappelle que, pour deux champs de vecteur X_1 et X_2, $L_{X_1}X_2 = [X_1, X_2]$ et on admet que, pour une forme α, $L_X(Y \lrcorner\, \alpha) = (L_XY) \lrcorner\, \alpha + Y \lrcorner\, (L_X\alpha)$. Montrer que :

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

7) Déduire de la question suivante l'identité de Jacbobi :

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$$

(Indication : calculer de deux façons différentes $L_{\xi_{\{h,g\}}}f$).