Exercices sur la mécanique

1 Problème à deux corps (solutions circulaires)

On étudie le mouvement de deux particules ponctuelles A et B : on note respectivement m_A et m_B les masses de A et B et respectivement x_A et x_B les fonctions du temps t qui donnent les positions de A et B. L'évolution du système est décrite par les points critiques de

$$\int_{\mathbb{R}} \left(m_A \frac{|\dot{x_A}|^2}{2} + m_B \frac{|\dot{x_B}|^2}{2} + \frac{Gm_A m_B}{|x_A - x_B|} \right) dt.$$

On pose

$$C := \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad x := x_B - x_A, \quad m := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad \text{et} \quad e^2 := Gm_A m_B$$

1) Démontrer que l'action se réécrit :

$$\int_{\mathbb{R}} (m_A + m_B) \frac{|\dot{C}|^2}{2} dt + \int_{\mathbb{R}} \left(m \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt.$$

On notera $\mathcal{A}[x]$ la deuxième intégrale.
2) Démontrer que l'équation d'Euler–Lagrange de $\mathcal{A}$ est :

$$m\ddot{x} = -\frac{e^2}{|x|^3} x. \tag{1}$$

Expliquer pourquoi on peut se ramener à l'étude de x (et laisser de côté C).
3) On recherche les solutions circulaires, de la forme $x(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$. Démontrer qu'une telle expression est solution des équations du mouvement si et seulement si :

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{r^2}. \tag{2}$$

4) L'énergie cinétique est $E_c = m\frac{|\dot{x}|^2}{2}$, l'énergie potentielle est $E_p = -\frac{e^2}{|x|}$ et l'énergie totale $E = E_c + E_p$. Calculer la valeur de E_c pour une solution circulaire en fonction de e^2 et r. En déduire que $E = -e^2/2r$.
5) L'intensité du moment angulaire ($\vec{J} := mx \times \dot{x}$) pour une trajectoire circulaire est $J = m\omega r^2$. Exprimer J en fonction de m, e^2 et r pour une solution circulaire (on pourra utiliser (2)). En déduire la relation suivante entre l'énergie totale et J :

$$E = -\frac{me^4}{2J^2}. \tag{3}$$

2 Problème à deux corps (suite)

On étudie les points critiques de

$$\mathcal{A}[x] := \int_{\mathbb{R}} \left(m \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt \tag{4}$$

en utilisant les variables de position $x = (x^1, x^2, x^3)$ et de moment $p = (p_1, p_2, p_3)$.
1) Au moyen de la transformée de Legendre, calculer l'hamiltonien $H(x, p)$ et écrire les équations de

Hamilton.
2) On note

$$X_1 := x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2 := x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_3 := x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1}$$

et, pour $a = 1, 2, 3$, $J_a := \langle p, X_a\rangle = p_i X_a^i$. Calculer les crochets de Poisson des fonctions H, J_1, J_2 et J_3 entre elles. Quelles conclusions peut-on en tirer sur les solutions des équations de la dynamique ?
3) Retrouver la loi des aires de Kepler : *les surfaces balayées par le segment joignant les deux points durant deux intervalles de temps de même longueur sont égales.*
4) Démontrer que, pour toute solution des équations d'Euler–Lagrange de (4), il existe un plan passant par l'origine qui contient la trajectoire de cette solution.

3 Problème à deux corps (solutions de Kepler)

On considère une solution $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de (1). On suppose que l'image est contenue dans le plan d'équation $x^3 = 0$, de sorte que l'on peut poser

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), 0) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0).$$

On notera $J_3 := mr^2\dot\theta$, où $\dot\theta := \frac{d\theta}{dt}$.
1) Ecrire les équations de Newton (1) sous la forme de deux équations différentielles ayant les fonctions r et θ comme inconnues. Retrouver le fait que J_3 est une quantité conservée.
2) On pose $r(t) = \rho\circ\theta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et

$$u(\theta) = \frac{J_3}{m\rho(\theta)}.$$

Exprimer $\dot r := \frac{dr}{dt}$ en fonction de ρ et de sa dérivée, puis de u et de sa dérivée.
3) De même, exprimer $\ddot r := \frac{d^2r}{dt^2}$ en fonction de u et de ses dérivées.
4) Déduire des questions précédentes que u est solution de :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{e^2}{J_3}. \tag{5}$$

5) Retrouver la solution circulaire obtenue à la question 3) du premier problème.
6) Déterminer toutes le solutions de (5). En déduire que les trajectoires de x sont toutes des coniques.

4 Gaz parfait

On rappelle la relation d'état d'un gaz parfait :

$$pV = NkT$$

et on note $\mathcal{N}$ la sous-variété de $\{(N, V, T, p)\}$ définie par cette relation. Son énergie interne est : $U = \frac{3}{2}NkT$ et la relation de bilan des échanges d'énergie est : $dU = q + w$. On définit la capacité calorique à volume constant C_V et la capacité calorique à pression constante C_p comme étant des fonctions définies sur $\mathcal{N}$ telles que

$$q = C_V dT + adV = C_p dT + bdp,$$

où a et b sont des fonctions sur $\mathcal{N}$. Déterminer C_V et C_p.