EXERCICES SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

1 Le brachistrochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0,H)$ et $B = (1,0)$ les extrémités de Γ. Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0,-1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est laché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \longmapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.
1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.
2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0,1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T.
3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0,1]$ et on note $\tau : [0,1] \longrightarrow [0,T]$ l'application inverse de $x : [0,T] \longrightarrow [0,1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0,1]$, $x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ, puis de f uniquement.
4) On pose $h(x) = H - f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.
5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s) = \cot \frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangiennne de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,v) & \longmapsto & \Lambda(t,x,v) \end{array}$$

et on lui associe l'action $\mathcal{L}[u] := \int_I \Lambda(t, u(t), \dot{u}(t))dt$ définie pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ est point critique de $\mathcal{L}$. Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(t,x,v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)v^i. \tag{1}$$

Indication : on commencera par identifier l'application $E = (E_1, \cdots, E_n) : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ qui, à tout (t,x,v,w) associe une expression $E(t,x,v,w)$ telle que l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$ s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $E = 0$.

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangienne

$$\begin{array}{rccc} L : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,v) & \longmapsto & L(t,x,v). \end{array}$$

On suppose que L est continue sur $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que $I \times \Omega \ni (t,x) \longmapsto L(t,x,0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$, on note $\mathcal{L}[u] := \int_I L(t,u(t),\dot{u}(t))dt$. On suppose que $\mathcal{L}$ est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi : I \longrightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, on a :

$$\mathcal{L}[u \circ \varphi] = \mathcal{L}[u]. \tag{2}$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α, si

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall s \in]0,+\infty[, \quad f(sv) = s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \alpha f(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

2) Montrer que la condition (2) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall (t,x,v,w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t,x,v,w) = 0.$$

3) Déduire de la question précédente que, $\forall j = 1, \cdots, n$, $\forall (t,x) \in I \times \Omega$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t,x,v) = L(v,x,0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)v^i. \tag{3}$$

4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \cdots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v). \tag{4}$$

5) Déduire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ et positivement homogène de degré 1 par rapport à v sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et des fonctions $a, b_1, \cdots, b_n : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F_0(x,v) + a(t,x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)v^i.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer que

$$\forall (t,x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n {}^{\backprime} \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x) \right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F(x,v) + \Lambda(t,x,v),;$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (1) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v. (Indication : poser $S(t,x) = \int_0^t a(\tau,x)d\tau$.)

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ v & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i \end{array}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.