Problèmes sur la seconde partie du cours

1 Champs électrique et magnétique émis par une charge ponctuelle en mouvement de translation rectiligne uniforme

On désigne par $\mathbb{M}$ l'espace (affine) de Minkowski et on considère une particule ponctuelle de charge q en mouvement de translation rectiligne uniforme. On considère deux référentiels inertiels relativistes R_x et R_y auxquels sont attachées respectivement les systèmes de coordonnées $x = (x^\mu) : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ et $y = (y^\mu) : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Les deux systèmes de coordonnées sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, & y^1 &= \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}}, \\ y^2 &= x^2, & y^3 &= x^3, \end{aligned}$$

où v est un nombre réel (qui représente la vitesse de R_y par rapport à R_x).

1) Expliquer ce qui permet de voir que l'on a supposé implicitement que $c = 1$.

2) On suppose dans la suite que la particule ponctuelle est au repos dans le référentiel R_y et y reste à la position $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3) = 0$. Déterminer les composantes des champs électrique et magnétiques dans le référentiel R_y en supposant qu'il n'y a pas d'autre charge et que les champs s'annulent à l'infini (on supposera $\varepsilon_0 = 1$).

3) On note F la 2-forme sur $\mathbb{M}$ qui représente les champs électrique et magnétique calculés à la question précédente. Montrer que $F = dA$ et expliciter les composantes de A dans R_y.

4) Expliciter les composantes de F dans le référentiel R_x en un point $M \in \mathbb{M}$ dont les coordonnées dans R_x sont $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ en fonction notamment des grandeurs $\xi \in \mathbb{R}^3$ et $\tau \in \mathbb{R}$ telles que :

$$x^0 = |\xi| + \tau \quad \text{et} \quad \vec{x} = \xi + (v, 0, 0)\tau.$$

On pourra utiliser (et éventuellement admettre) la relation

$$|\vec{y}| = \frac{|\xi| - \langle v, \xi \rangle}{\sqrt{1-v^2}},$$

où $(y^0, \vec{y})$ sont les composantes du point M dans R_y.

5) Déduire des questions précédentes les valeurs des champs électrique et magnétique émis par une particule chargée animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

2 Un calcul quantique de la formule de Planck

On se propose de redémontrer la loi de Planck en partant d'hypothèses quantiques. On considère une cavité fermée Ω de volume V (corps noir) contenant un rayonnement électromagnétique à l'équilibre thermodynamique. On suppose que ce rayonnement est décrit par une assemblé de photons, i.e. des quanta de lumière caractérisés par leur fréquence ν et leur énergie $h\nu$.

1) En supposant que chaque photon a une masse nulle au repos, déterminer la norme $|\vec{p}|$ de l'impulsion d'un photon de fréquence ν (on ne prendra pas ici $c = 1$). Déterminer le volume occupé par les états possédant une fréquence comprise entre ν^s et $\nu^s + d\nu^s$ dans l'espace de phase $T^*\Omega$ des photons.

2) On divise l'espace des phases $T^*\Omega$ en cellules de volume h^3. On note la grandeur A^s telle que le nombre de cellules accessibles aux états possédant une fréquence comprise entre ν^s et $\nu^s + d\nu^s$ soit égal à VA^s. Donner une estimation du nombre A^s (on n'oubliera pas qu'il y a deux photons de polarisation différente correspondant à une même impulsion).

3) L'hypothèse qui sera faite dans la suite est que les photons peuvent se répartir dans les différentes cellules avec une probabilité égale, mais qu'ils sont en plus *indiscernables* (statistique de Bose). Estimer le nombre de possibilités de remplissage des VA^s cellules de façon à ce qu'il y ait un nombre Vp_0^s de cellules vides, un nombre Vp_1^s de cellules occupées par un photon et, d'une manière générale, il y ait Vp_j^s cellules occupées par j photons (de sorte que $A^s = \sum_{j\geq 0} p_j^s$). (Indication : les photons sont indiscernables, mais en revanche il est possible de numéroter les cellules...).
4) On divise l'espace de phase $T^*\Omega$ en couches de fréquences $[\nu^s, \nu^s + d\nu^s[$, suffisamment « épaisses » pour que les nombres A^s, p_j^s décrivant l'état statistique dans chaque couche puissent être considérés comme grands (mais tout en considérant que $d\nu^s$ reste petit). On note $N^s = \sum_{j\geq 0} jp_j^s$ le nombre de photons dans la plage $[\nu^s, \nu^s + d\nu^s[$ par unité de volume et on suppose que la valeur de l'énergie totale $E = V\sum_s N^s h\nu^s$ est fixée (hypothèse canonique). Estimer le nombre d'états $W = W(N^s, p_j^s)$ correspondant à la distribution $(N^s, p_j^s)_{s,j}$ (on pourra utiliser la formule de Stirling).
5) Estimer l'entropie $S = k \log W(N^s, p_j^s)$ correspondant à une distribution $W(N^s, p_j^s)$ des photons. (On ne gardera que les termes dominants).
6) En appliquant la théorie de Boltzmann et en tenant compte des contraintes $\forall s$, $\sum_{j\geq 0} p_j^s = A^s$ et $\sum_s N^s h\nu^s = \sum_s \sum_{j\geq 0} jp_j^s h\nu^s$, montrer qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange λ^s et β tels qu'à l'équilibre :

$$\forall s, \forall j \geq 0, \quad 1 + \log p_j^s + \lambda^s + \beta jh\nu^s = 0$$

et donc qu'il existe des constantes B^s telles que $p_j^s = B^s e^{-j\beta h\nu^s}$.
7) Déterminer B^s, puis N^s en fonction de A^s, $h\nu^s$ et β. Enfin exprimer l'énergie totale E en fonction de ces données.
8) Exprimer l'entropie à l'équilibre en fonction de E, A^s, $h\nu^s$ et β. En déduire une relation entre β et la température.
9) Retrouver la loi de Planck

$$E = V \sum_s \frac{8\pi h(\nu^s)^3}{c^3} \frac{d\nu^s}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}} - 1}.$$

3 L'oscillateur harmonique classique

On considère une particule de masse m soumise à une force dérivant d'un potentiel unidimensionnel quadratique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, où ω est une constante. Ecrire le lagrangien de Maupertuis correspondant et l'équation d'Euler–Lagrange. Résoudre les équations de la dynamique ainsi obtenues. Quelle est la période des solutions ?

4 L'oscillateur harmonique quantique I

Nous cherchons les états stationnaires, c'est-à dire les fonctions propres du hamiltonien :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi(x) = E\varphi(x). \tag{1}$$

Posons $\epsilon = E/(\hbar\omega)$, $\alpha = m\omega/\hbar$ et $\phi(y) = \varphi(y/\sqrt{\alpha})$. Avec ces changements de variable, l'équation devient

$$\frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\phi(y) = \epsilon\phi(y). \tag{2}$$

1) En posant $\phi(y) = f(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$, montrer que l'équation satisfaite par f s'écrit $f'' - 2yf' + (2\epsilon - 1)f = 0$. On peut chercher des solutions sous forme de séries entières $f(y) = \sum a_n y^n$. Montrer alors que les coefficients satisfont la relation $a_{n+2} = -\frac{2\epsilon-1-2n}{(n+1)(n+2)}a_n$.
2) Montrer que si f n'est pas un polynôme, φ n'est pas de carré intégrable en montrant que $\phi(y) \sim e^{\frac{y^2}{2}}$. Montrer que f n'est un polynôme que lorsque $E = (n + 1/2)\hbar\omega$.
3) En déduire que les niveaux d'énergie que peut prendre l'oscillateur forment un ensemble discret.
4) On considère une solution (φ, E) de (1). Trouver les solutions de l'équation de Schrödinger

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = 0 \tag{3}$$

telles que $\psi(0,x) = \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Quelle valeur prend cette solution au temps T, où T est la période calculée à la fin de l'exercice précédent ?

Remarquons aussi que l'énergie minimale de l'oscillateur est strictement positive, ce qui est à rapprocher des relations d'incertitude : une particule ne peut être parfaitement au repos en un point parfaitement déterminé.

5 L'oscillateur harmonique quantique II

On considère les opérateurs

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{et} \quad a^* := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right),$$

qui agissent sur les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On admet que a et a^* agissent de façon continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide) dans lui-même.

1) On pose $\widehat{H} := \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)$. Montrer que

$$\frac{1}{2}(aa^* + a^*a) = \widehat{H}.$$

2) Déterminer quelles sont les solutions des équations $a\varphi = 0$ et $a^*\varphi = 0$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On notera ψ_0 la solution de $a\varphi = 0$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} |\psi_0|^2 dx = 1$ et $\psi_0 \geq 0$.

3) Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$. Déterminer $\widehat{af}$ et $\widehat{a^*f}$ en fonction de $a\widehat{f}$ et de $a^*\widehat{f}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\psi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^*)^n \psi_0$. Montrer que $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\psi_n = H_n\psi_0$, où H_n est un polynôme dont on précisera le degré.

5) Exprimer $\widehat{\psi_n}$ en fonction de ψ_n.

Commentaire — *Les polynômes H_n sont appelés polynômes de Hermite. Nous allons montrer que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$.*

6) Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad [a, a^*]f := a\,(a^*f) - a^*(af) = f.$$

7) En déduire successivement que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a\,(a^*)^n = a^*a\,(a^*)^{n-1} + (a^*)^{n-1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a\,(a^*)^n = (a^*)^n\, a + n\,(a^*)^{n-1}$.

8) En utilisant le fait que $a\psi_0 = 0$, la propriété 2. et le fait que

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} (a^*f)\, g\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(ag)\, dx,$$

montrer que, si $m \geq n$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n\psi_m\, dx = \frac{n!}{\sqrt{n!m!}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0 \left((a^*)^{m-n} \psi_0\right) dx.$$

Et en déduire que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

9) Montrer que utilisant le résultat de la question 6) que ψ_0 est vecteur propre de $\widehat{H}$ pour une valeur propre que l'on précisera. Montrer également (en utilisant le résultat de la question 7 — 2.) que les ψ_n sont vecteurs propres de $\widehat{H}$ pour des valeurs propres que l'on précisera également.

Remarque — *On peut aussi montrer que la famille $H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est totale dans l'espace de Hilbert usuel $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (elle forme donc une base hilbertienne). Cela revient à démontrer, que la famille des H_n est totale dans l'espace L^2 avec la mesure gaussienne standard. Pour cela nous nous plaçons dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, e^{-\frac{x^2}{2}}dx/\sqrt{2\pi})$. On montre que, pour tout t réel, la série $\sum(itx)^n/n!$ y converge vers e^{-itx}. Puis on en déduit que, si une fonction $u(x)$ est orthogonale à tous les polynômes de Hermite, elle satisfait la relation*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)e^{itx}\, d\gamma(x),$$

où l'on a défini la mesure γ par

$$d\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx/\sqrt{2\pi}.$$

Comme $u \in L^2(\mathbb{R}, d\gamma)$ et $\gamma(\mathbb{R}) = 1 < \infty$, on a aussi $u \in L^1(\mathbb{R}, d\gamma)$. Ainsi, la mesure $u\gamma$ existe et, d'après la relation précédente, elle satisfait, pour tout t réel,

$$\widehat{u\gamma}(t) = 0,$$

où le chapeau indique la transformation de Fourier, c'est-à-dire la fonction caractéristique. Comme celle-ci est nulle identiquement, la mesure $u\gamma$ est la mesure nulle, donc $u = 0$ $\gamma - p.p.$, donc $u = 0$.

6 Moment cinétique angulaire

On rappelle que le moment cinétique angulaire classique d'une particule, par rapport à l'origine 0 est le vecteur $J := x \times p$. On considère la version quantique de cette observable, c'est à dire l'opérateur

$$\widehat{J} := \widehat{x} \times \widehat{p} = \begin{pmatrix} \widehat{y}\widehat{p}_z - \widehat{z}\widehat{p}_y \\ \widehat{z}\widehat{p}_x - \widehat{x}\widehat{p}_z \\ \widehat{x}\widehat{p}_y - \widehat{y}\widehat{p}_x \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $[\widehat{x}^\alpha, \widehat{p}_\beta] = i\hbar\delta^\alpha_\beta$.
1) Démontrer que $\widehat{J} \times \widehat{J} = i\hbar\widehat{J}$.
2) On pose $\widehat{J}^2 := \widehat{J}_x^2 + \widehat{J}_y^2 + \widehat{J}_z^2$ et $\widehat{J}_+ := \widehat{J}_x + i\widehat{J}_y$ et $\widehat{J}_- := \widehat{J}_x - i\widehat{J}_y$. Démontrer que $[\widehat{J}^2, \widehat{J}_+] = [\widehat{J}^2, \widehat{J}_-] = [\widehat{J}^2, \widehat{J}_z] = 0$, $[\widehat{J}_z, \widehat{J}_+] = \hbar\widehat{J}_+$, $[\widehat{J}_z, \widehat{J}_-] = -\hbar\widehat{J}_-$ et $[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-] = 2\hbar\widehat{J}_z$.

Dans la suite nous allons considérer une représentation sur un espace de Hilbert complexe de ces opérateurs. On désigne par $E_{\Lambda,m}$ l'ensemble des vecteurs propres pour $\widehat{J}^2$ et $\widehat{J}_z$ avec les valeurs propres $\Lambda\hbar^2$ et $m\hbar$ respectivement. On note $|\Lambda, m\rangle$ un vecteur dans $E_{\Lambda,m}$. Il satisfait donc à $\widehat{J}^2|\Lambda, m\rangle = \Lambda\hbar^2|\Lambda, m\rangle$ et $\widehat{J}_z|\Lambda, m\rangle = m\hbar|\Lambda, m\rangle$. S'il n'y a pas de vecteur propre pour (Λ, m) on convient de poser $E_{\Lambda,m} := \{0\}$.
3) Montrer que, pour que $E_{\Lambda,m} :\neq \{0\}$, il est nécessaire que $\Lambda, m \in \mathbb{R}$ et $\Lambda \geq 0$.
4) Démontrer que $\widehat{J}_+|\Lambda, m\rangle \in E_{\Lambda,m+1}$ et $\widehat{J}_-|\Lambda, m\rangle \in E_{\Lambda,m-1}$.
5) Démontrer que l'adjoint de $\widehat{J}_\pm$ est $\widehat{J}_\mp$ et que $\widehat{J}_\mp\widehat{J}_\pm = \widehat{J}^2 - \widehat{J}_z^2 \mp \hbar\widehat{J}_z$. Utiliser ce résultat pour calculer $||\widehat{J}_\pm|\Lambda, m\rangle||^2$ et en déduire que, si $|\Lambda, m\rangle$ est vecteur propre (et donc en particulier non nul), alors $\Lambda - m^2 \mp m \geq 0$. Dans la suite on fixe (Λ, m) et on suppose que $|\Lambda, m\rangle \neq 0$.
6) Soit $p := \inf\{n \in \mathbb{N}/\widehat{J}_-^n|\Lambda, m\rangle = 0\}$. Démontrer que p existe dans $\mathbb{N}$ et que $\widehat{J}_-^{p-1}|\Lambda, m\rangle \neq 0$ et $\widehat{J}_-^p|\Lambda, m\rangle = 0$. En déduire que $\Lambda = (m - p + 1)^2 - (m - p + 1)$.
7) Soit $q := \inf\{n \in \mathbb{N}/\widehat{J}_+^n|\Lambda, m\rangle = 0\}$. Démontrer que q existe dans $\mathbb{N}$ et que $\widehat{J}_+^{q-1}|\Lambda, m\rangle \neq 0$ et $\widehat{J}_+^q|\Lambda, m\rangle = 0$. En déduire que $\Lambda = (m + q - 1)^2 + (m + q - 1)$.
8) Montrer que $m = \frac{1}{2}(p - q)$ et $\Lambda = j(j + 1)$, où $j := \frac{1}{2}(p + q) - 1$.
9) En déduire que les valeurs propres autorisées pour $\widehat{J}^2$ sont de la forme $j(j+1)\hbar^2$, pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et que, dans le sous-espace vectoriel des vecteurs propres de $\widehat{J}^2$ pour $j(j + 1)\hbar^2$, les valeurs propres de $\widehat{J}_z$ sont $m\hbar = -j\hbar, -(j - 1)\hbar, \cdots, (j - 1)\hbar, j\hbar$.
Remarque — *L'usage est de noter $|j, m\rangle$ ce que nous avons noté ici $|\Lambda, m\rangle = |j(j + 1), m\rangle$.*