Université Paris 7 – Denis Diderot Année 2017/2018

Master 2 de Mathématiques
Calcul des variations et géométries symplectiques et multisymplectiques
EXERCICES

1 Le brachistrochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0, H)$ et $B = (1, 0)$ les extrémités de Γ. Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0, -1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est laché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \longmapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.

1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.

2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0, 1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T.

3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0, 1]$ et on note $\tau : [0, 1] \longrightarrow [0, T]$ l'application inverse de $x : [0, T] \longrightarrow [0, 1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0, 1]$, $x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ, puis de f uniquement.

4) On pose $h(x) = H - f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.

5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s) = \cot \frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangiennne de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, v) & \longmapsto & \Lambda(t, x, v) \end{array}$$

et on lui associe l'action $\mathcal{L}[u] := \int_I \Lambda(t, u(t), \dot{u}(t))dt$ définie pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ est point critique de $\mathcal{L}$. Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x) v^i. \tag{1}$$

Indication : on commencera par identifier l'application $E = (E_1, \cdots, E_n) : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ qui, à tout (t, x, v, w) associe une expression $E(t, x, v, w)$ telle que l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$ s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $E = 0$.

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangienne

$$\begin{array}{rccl} L : & I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, v) & \longmapsto & L(t, x, v). \end{array}$$

On suppose que L est continue sur $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que $I \times \Omega \ni (t, x) \longmapsto L(t, x, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$, on note $\mathcal{L}[u] := \int_I L(t, u(t), \dot{u}(t))dt$. On suppose que $\mathcal{L}$ est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi : I \longrightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, on a :

$$\mathcal{L}[u \circ \varphi] = \mathcal{L}[u]. \tag{2}$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α, si

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall s \in]0, +\infty[, \quad f(sv) = s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \alpha f(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

2) Montrer que la condition (2) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall (t, x, v, w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t, x, v, w) = 0.$$

3) Déduire de la question précédente que, $\forall j = 1, \cdots, n$, $\forall (t, x) \in I \times \Omega$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t, x, v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t, x, v) = L(v, x, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)v^i. \tag{3}$$

4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \cdots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, x, v). \tag{4}$$

5) Déduire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ et positivement homogène de degré 1 par rapport à v sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et des fonctions $a, b_1, \cdots, b_n : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F_0(x, v) + a(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x)v^i.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n {}^{\text{‘}} \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) \right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F(x, v) + \Lambda(t, x, v), ;$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (1) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v. (Indication : poser $S(t, x) = \int_0^t a(\tau, x)d\tau$.)

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ v & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i \end{array}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.

5 Calcul des variations et champ magnétique

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et on se donne un lagrangien régulier

$$\begin{array}{cccc} L: & \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v) & \longmapsto & L(x,v) \end{array}$$

et l'action $\mathcal{L}[u] := \int_I L(u(t),\dot{u}(t))dt$ définie sur l'espace des chemins $\{u : I \longrightarrow \Omega\}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une 1-forme régulière $A = A_i dx^i$ sur Ω et on considère le lagrangien

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{L}: & \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v) & \longmapsto & \widetilde{L}(x,v) \end{array}$$

où

$$\widetilde{L}(x,v) := L(x,v) + A_i(x)v^i.$$

Enfin on définit l'action $\widetilde{\mathcal{L}}[u] := \int_I \widetilde{L}(u(t),\dot{u}(t))dt$.

1) Ecrire l'équation d'Euler–Lagrange des points critiques de $\widetilde{\mathcal{L}}$ en fonction de L et de A. On pourra poser $F = \sum_{1\leq i<j\leq n} F_{ij}dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j := dA$.
2) (Etude d'un exemple.) On suppose que $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $L(x,v) = \frac{1}{2}m|v|^2$ et on pose $B = F_{12}$. Ecrire les équations d'Euler–Lagrange pour les points critiques de $\widetilde{\mathcal{L}}$ dans ce cas et expliciter les solutions de ces équations.
3) On suppose dans cette question et les suivantes que la transformée de Legendre pour L est *non dégénérée*, c'est à dire que :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (x,v) & \longmapsto & \left(x, \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)dx^i\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme. On définit $H : \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $H(x,p) = p_i v^i - L(x,v)$ pour tout (x,v,p) tel que $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)$. Démontrer que la transformée de Legendre pour $\widetilde{L}$ est également non dégénérée. On notera $\widetilde{p}_i$ les coordonnées de l'impulsion pour la transformée de Legendre de $\widetilde{L}$ et $\widetilde{H}$ l'hamiltonien qui est image de $\widetilde{L}$. Exprimer $\widetilde{p}$ en fonction de p et A et $\widetilde{H}$ en fonction de H et A.
4) On note $\widetilde{\omega} = d\widetilde{p}_i \wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\Omega = \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$. Expliciter les coordonnées du champ de vecteur hamiltonien $\xi_{\widetilde{H}}$ associé à $\widetilde{H}$ en fonction de H et de A.
5) On note

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & T^*\Omega & \longrightarrow & T^*\Omega \\ & (x,p) & \longmapsto & (x, p + A_x). \end{array}$$

Calculer $\varphi^*\widetilde{H} = \widetilde{H} \circ \varphi$ et $\varphi^*\widetilde{\omega}$ en fonction de H, A et $\omega := dp_i \wedge dx^i$. Ecrire les équations de Hamilton pour $\varphi^*\widetilde{H}$ et $\varphi^*\widetilde{\omega}$, c'est à dire les équations du flot du champ de vecteur ζ sur $T^*\Omega$ défini par $\zeta \mathbin{\lrcorner} \varphi^*\widetilde{\omega} + d\varphi^*\widetilde{H} = 0$. Interpréter.
6) Que peut-on dire dans les questions précédentes lorsque $A = dV$, où $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$?

6 Théorème de Noether

Soit $\mathcal{M}$ une variété et $T\mathcal{M}$ son fibré tangent. On note $x = (x^i)$ les coordonnées locales sur $\mathcal{M}$ et $(x, v) = (x^i, v^i)$ des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On se donne une densité lagrangienne $L : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tous temps $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 < t_2$, on note

$$\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

On considère un champ de vecteur tangent à $\mathcal{M}$ et dépendant du temps $X = X^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ (donc défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$) et une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit γ_s par $\gamma_s(t) := e^{sX(t,\cdot)}(\gamma(t))$. On dit que X *est une symétrie infinitésimale de* L *modulo* df si, pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 < t_2$,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}[\gamma_s]\right)\Big|_{s=0} = f(t_2, \gamma(t_2)) - f(t_1, \gamma(t_1)).$$

1) Démontrer que X est une symétrie infinitésimale de L modulo df ssi $\forall (t, x, v) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{M}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, v)X^i(t, x) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial X^i}{\partial x^i}(t, x)v^i\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)v^i.$$

2) Démontrer que, si l'hypothèse précédente est vérifiée et si γ est point critique de $\mathcal{L}$, alors la quantité

$$Q(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))X^i(t, \gamma(t)) - f(t, \gamma(t))$$

est conservée.

3) Appliquer le résultat précédent au cas suivant : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$, $L(t, x, v) = \frac{1}{2}m|v|^2$, $X(t, x) := (t - t_0)V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, où $V = (V^1, V^2, V^3) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer. Interpréter le sens de cette symétrie et de la quantité conservée.

7 Transformations canoniques

Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension n et $T\mathcal{M}$ son fibré cotangent. On note $x = (x^i)$ des coordonnées locales sur $\mathcal{M}$ et $(x, p) = (x^i, p^i)$ des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On munit $T^*\mathcal{M}$ de la forme symplectique $\omega := d\theta$, où $\theta := p_i dx^i$. On se donne une fonction régulière $H : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on définit le champ de vecteur hamiltonien associé ξ_H par $\xi_H \lrcorner\, \omega + dH = 0$. On note $e^{s\xi_H}$ le flot de ξ_H (on pourra supposer qu'il est défini pour toute valeur de $s \in \mathbb{R}$). On se donne deux valeurs $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ telles que $t_1 < t_2$ et on pose $\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} := \{(\gamma, \pi) \in \mathcal{C}^2([t_1, t_2], T^*\mathcal{M})\}$ et on définit sur $\mathcal{C}_{t_1}^{t_2}$ la fonctionnelle

$$\mathcal{P}[\gamma, \pi] := \int_{t_1}^{t_2} \left(\pi_i(t)\dot{\gamma}^i(t) - H(\pi(t), \gamma(t))\right)dt.$$

1) Déterminer l'équation d'Euler–Lagrange de $\mathcal{P}$ (pour des variations laissant $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ fixes et $\pi(t_1)$ et $\pi(t_2)$ libres).

2) On suppose que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, $\exists!(\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)}) \in \mathcal{C}_{t_1}^{t_2}$ tel que $\gamma_{(x_1,x_2)}(t_1) = x_1$, $\gamma_{(x_1,x_2)}(t_2) = x_2$ et $(\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)})$ est solution des équations d'Euler–Lagrange de $\mathcal{P}$. On suppose que $(x_1, x_2) \longmapsto (\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)})$ est $\mathcal{C}^1$ et on définit $W : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$W(x_1, x_2) := \mathcal{P}[\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)}].$$

Calculer dW.

3) On pose $\Phi := e^{(t_2 - t_1)\xi_H} : T^*\mathcal{M} \longrightarrow T^*\mathcal{M}$ et on note $G := \{(x, p, \Phi(x, p)); (x, p) \in T^*\mathcal{M}\}$ son graphe. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G & \longrightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \\ & (x_1, p_1, x_2, p_2) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array}$$

est un difféomorphisme.
4) On considère les applications

$$\begin{array}{cccc} \Pi_1 : & G & \longrightarrow & T^*\mathcal{M} \\ & (x_1,p_1,x_2,p_2) & \longmapsto & (x_1,p_1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \Pi_2 : & G & \longrightarrow & T^*\mathcal{M} \\ & (x_1,p_1,x_2,p_2) & \longmapsto & (x_2,p_2) \end{array}$$

Montrer que $\Pi_2^*\theta - \Pi_1^*\theta$ est une 1-forme exacte (indication : considérer $W \circ \psi$).
5) Déduire de ce qui précède que $\Phi^*\omega = \omega$ (indication : utiliser le fait que Π_1 est un difféomorphisme).

8 Usage de multiplicateurs de Lagrange

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\mathcal{M}$ une variété de dimension n. On notera $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ le fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ dont la fibre en le point $x \in \mathcal{M}$ est $T_x\mathcal{M} \oplus T_x^*\mathcal{M}$. Un point sur $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ est donc un triplet (x,v,p), où $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x\mathcal{M}$ et $p \in T_x^*\mathcal{M}$. Soit

$$\begin{array}{cccc} L : & I \times T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,v) & \longmapsto & L(t,x,v) \end{array}$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. À L est associée la fonctionnelle $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(I,\mathcal{M})$ par $\mathcal{L}[\gamma] = \int_I L(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$, pour tout $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathcal{M})$. On suppose que la transformée de Legendre $I \times T\mathcal{M} \longrightarrow I \times T^*\mathcal{M}$ qui, à (t,x,v), associe $(t,x,\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i)$ est un difféomorphisme (hypothèse de Legendre) et on note $(t,x,p) \longmapsto (t,x,V(t,x,p))$ l'application inverse.

(i) On considère sur $\mathcal{C}^\infty(I,T\mathcal{M})$ la fonctionnelle $\mathcal{L}^T$ définie par $\mathcal{L}^T[\gamma,\zeta] = \int_I L(t,\gamma(t),\zeta(t))dt$, pour tout $(\gamma,\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(I,T\mathcal{M})$. Déterminer l'équation d'Euler–Lagrange de cette fonctionnelle. Est-ce vraiment intéressant ?

(ii) Sur $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ on considère la fonctionnelle $\mathcal{L}^{TT^*}$ qui, à $(\gamma,\zeta,\pi) \in \mathcal{C}^\infty(I,T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M})$, associe
$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\zeta,\pi] = \int_I \left[L(t,\gamma(t),\zeta(t)) + \pi_i(t)(\dot\gamma^i(t) - \zeta^i(t))\right] dt.$$
Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par une application (γ,ζ,π) qui est point critique pour des variations $(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$ (sections de $(\gamma,\zeta,\pi)^*T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$) à support compact.

Pour toute variation $(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$, on pose $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma_\varepsilon,\zeta_\varepsilon,\pi_\varepsilon)\right)|_{\varepsilon=0}$, où $\frac{d(\gamma_\varepsilon,\zeta_\varepsilon,\pi_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = (\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$.

(iii) Montrer que les solutions des équations obtenues à la question précédente correspondent aux points critiques de $\mathcal{L}$.

(iv) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi) = 0$, $\forall\delta\pi$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.

(v) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0) = 0$, $\forall\delta\zeta$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.

(vi) Justifier le fait que les conditions $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi) = 0$, $\forall\delta\pi$ ou $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0) = 0$, $\forall\delta\zeta$ ont bien un sens (en particulier indépendant de tout système de coordonnées).

9 Assemblée d'oscillateurs harmoniques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $L : T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $L(x,v) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (v^j)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (x^j)^2$. Il sera commode d'identifier $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et d'identifier x et v avec les matrices colonnes

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

de sorte que $L(x,v) = \frac{1}{2}({}^t vv - {}^t xx)$. Sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, on définit l'action $\mathcal{L}[\gamma] := \int_{\mathbb{R}} L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$.

(i) Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par les points critiques de cette action. Déterminer l'ensemble des solutions de ces équations, que l'on notera $\mathcal{E}$.

(ii) Calculer la transformée de Legendre de cette action et l'hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ correspondant. On pourra identifier un élément $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ avec une matrice ligne $p = (p_1 \cdots p_n)$. Ecrire le système des équations de Hamilton. On notera $\omega = dp_i \wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n$.

(iii) On note $\mathfrak{u}(n) := \{u = A + iB /\ A, B \in M(n,\mathbb{R}),\ {}^t A + A = 0,\ {}^t B = B\}$ [1]. On écrira :

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \cdots & A^n_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B^{11} & \cdots & B^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{n1} & \cdots & B^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

ainsi que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) := \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial p}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} \end{pmatrix}.$$

À toute matrice $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe le champ de vecteur

$$\xi_u := (A^i_j x^j + B^{ij}p_j)\frac{\partial}{\partial x^i} - (A^j_i p_j + B_{ij}x^j)\frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(Ax + B\,{}^t p) - (pA + {}^t xB)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right).$$

Montrer qu'il existe une unique fonction $f_u \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que $\xi_u \lrcorner\, \omega + df_u = 0$ et $f_u(0,0) = 0$.

(iv) Calculer le crochet de Poisson $\{H, f_u\}$.

(v) Préciser (en justifiant) si la fonction f_u correspond à une quantité conservée telle que celles qui sont prévues par la version vue en cours du théorème de Noether pour un lagrangien. On pourra discuter en fonction des valeurs de A et B.

(vi) Calculer [2] le crochet de Poisson $\{f_u, f_{\tilde u}\}$, pour deux éléments $u = A + iB, \tilde u = \tilde A + i\tilde B \in \mathfrak{u}(n)$ en fonction du crochet $[u,\tilde u]$.

(vii) On revient au point de vue lagrangien. À $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe l'opérateur linéaire T_u : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ défini par $T_u\gamma = A\gamma + B\frac{d\gamma}{dt}$. Calculer $\delta\mathcal{L}_\gamma(T_u\gamma) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{L}[\gamma + \varepsilon T_u\gamma)\right|_{\varepsilon=0}$ et montrer que cette quantité est égale l' intégrale d'une dérivée totale. Qu'en déduit-on ?

(viii) Est-on dans un cas d'application du théorème de Noether vu en cours ? Expliciter le résultat qui serait prévu par ce théorème. On notera Q_u la quantité censée être conservée.

(ix) Vérifier que, pour toute solution γ des équations d'Euler–Lagrange, Q_u est conservée. Comparez avec le résultat de la question (iv).

(x) Calculer l'action du commutateur $[T_u, T_{\tilde u}]$ sur une application $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Que devient $[T_u, T_{\tilde u}]\gamma$ dans le cas où $\gamma \in \mathcal{E}$ (cf. question (i)).

(xi) Écrire l'équation de Hamilton–Jacobi associée au problème variationnel étudié dans cet exercice.

---

1. autrement dit u est antihermitienne : $u^\dagger + u = 0$
2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$, on aura avantage à introduire la matrice ligne $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n})$ et la matrice colonne $\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix}$.