Mercredi 30 : Romain Pétrides, à distance
Jeudi 1 er : Frédéric Hélein, à Sophie Germain, 14 h - 17 h

Partiel : 8 avril, à confirmer

Surfaces $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$.

Cas où $\mathcal{S}$ est l'image d'un plongement $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

1re f.f. $\quad g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\rangle$

2ème f.f. $\quad B = B_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, n \right\rangle \qquad n : \Omega \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$u \mapsto u \circ \varphi \quad$ où $\quad \varphi : \Omega_1 \to \Omega_2 = \Omega$

$n \mapsto n \circ \varphi$

$g \mapsto \varphi^* g = g_{ij} \circ \varphi \, (\varphi^* dx^i) \otimes (\varphi^* dx^j)$ $\quad$ où $\left(\varphi^* dx^i := d(x^i \circ \varphi) = d\varphi^i = \boxed{\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k} \right.$

$B \mapsto \varphi^* B$

produit tensoriel (bilinéaire).

$(\lambda \alpha + \mu \beta) \otimes \gamma = \lambda \alpha \otimes \gamma + \mu\, \beta \otimes \gamma$

Valeurs propres de B par rapport à g sont les courbures principales $k_1 \leq k_2$.

$\det (B - \lambda g) = 0$

Usage d'un repère orthonormé mobile "sur $\mathcal{S}$" (en fait, il dépendra ici de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$)

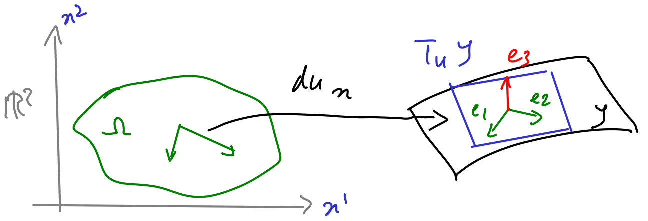
<u>Définition</u> Un repère mobile sur $\mathcal{S}$, associé à $u : \Omega \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est la donnée de $e_1 : \Omega \to S^2$, $e_2 : \Omega \to S^2$ et $e_3 : \Omega \to S^2$ tels que:

$\mathcal{C}^2$

applications $\mathcal{C}^1$

a) $\forall x \in \Omega$, $\quad (e_1(x), e_2(x), e_3(x))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

b) ——— $\quad (e_1(x), e_2(x))$ est une base orthonormée directe de $T_{u(x)}\mathcal{S}$



<u>Observation</u> $\quad e_3 = n$ (application de Gauss)
$= e_1 \times e_2$

<u>Définition</u> pour $a, b \in \{1, 2, 3\}$, $\quad \boxed{\omega_a^b := \langle de_a, e_b \rangle}$

$$de_a = \underbrace{\frac{\partial e_a}{\partial x^1}}_{\in \mathbb{R}^3} dx^1 + \underbrace{\frac{\partial e_a}{\partial x^2}}_{\in \mathbb{R}^3} dx^2 \Rightarrow \omega_a{}^b = \langle \frac{\partial e_a}{\partial x^1}, e_b \rangle dx^1 + \langle \frac{\partial e_a}{\partial x^2}, e_b \rangle dx^2.$$

Conséquence : $de_a = \omega_a{}^b e_b$ $\left(\sum_{b=1}^{3} \text{ sous-entendu} \right)$

Lemme $\boxed{\omega^a{}_b + \omega^b{}_a = 0}$

Preuve $\langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab}$ $\left[\delta_{aa} = 1 \ ; \text{ si } a \neq b, \ \delta_{ab} = 0 \ / \text{ i.e. } \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \right]$

$$\Downarrow$$

$$d(\langle e_a, e_b \rangle) = d(\delta_{ab}) = 0$$

$$\|$$

$$\langle de_a, e_b \rangle + \langle e_a, de_b \rangle = \omega_a{}^b + \omega_b{}^a.$$

Conséquence
$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1{}_2 & \omega^1{}_3 \\ \omega^2{}_1 & 0 & \omega^2{}_3 \\ \omega^3{}_1 & \omega^3{}_2 & 0 \end{pmatrix} = \omega^1{}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^1{}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^2{}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique $(e_1, e_2, e_3) : \Omega \longrightarrow$ Repères orthonormés directs $\subset \mathbb{R}^3$

$\simeq$ $SO(3)$ = variété de dimension 3

Exercice $\|$ sous-variété de dimension 3 dans $M(3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$

Lien avec les 2 formes fondamentales

$$T_{u(x)} \Sigma = \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

$\exists \, \alpha^i{}_j$,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x^1} = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_1{}^2 e_2 = \alpha^i{}_1 e_i \quad \left(\sum_{i=1}^{2} \right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x^2} = \alpha^1{}_2 e_1 + \alpha^2{}_2 e_2 = \alpha_2{}^i e_i \quad \left(\sum_{i=1}^{2} \right) \end{cases} \iff \boxed{du = \alpha^i{}_j e_i dx^j}$$

si $\boxed{\alpha^i = \alpha^i{}_j dx^j = \alpha^i{}_1 dx^1 + \alpha^i{}_2 dx^2} \in (\mathbb{R}^2)^*$ $\boxed{du = \alpha^i e_i}$

$$du = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2$$

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j} \rangle = \langle \alpha^k_i e_k, \alpha^l_j e_l \rangle = \delta_{kl} \alpha^k_i \alpha^l_j$$

$$\Rightarrow g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \delta_{kl} \alpha^k_i \alpha^l_j dx^i \otimes dx^j = \delta_{kl} (\alpha^k_i dx^i) \otimes (\alpha^l_j dx^j)$$

$$\iff \boxed{g = \delta_{kl} \alpha^k \otimes \alpha^l}$$

Matriciellement

$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} \alpha^1{}_1 & \alpha^1{}_2 \\ \alpha^2{}_1 & \alpha^2{}_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{g = {}^t A \, A}$

Lien avec la deuxième forme fondamentale

Introduisons $h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ telle que $\boxed{{}^tA\, h\, A = B} \iff \boxed{h = ({}^tA)^{-1} B A^{-1}}$

$$B_{ij} = \alpha^k_i \, h_{kl} \, \alpha^l_j$$

$$\iff \quad B = B_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \alpha^k_i \, h_{kl} \, \alpha^l_j \, dx^i \otimes dx^j$$

$$= h_{kl} \, (\alpha^k_i \, dx^i) \otimes (\alpha^l_j \, dx^j) = h_{kl} \, \alpha^k \otimes \alpha^l$$

Matriciellement $\boxed{B = {}^tA\, h\, A}$

Donc $\boxed{B = h_{kl} \, \alpha^k \otimes \alpha^l}$ et $\boxed{g = \delta_{kl} \, \alpha^k \otimes \alpha^l}$

Conséquence : les courbures principales k_1 et k_2 sont les valeurs propres de h

Définition a) Courbure moyenne de $\mathcal{S}$ au point $u(x)$:

$$\boxed{H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\operatorname{tr} h}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B\, g^{-1})}$$

b) Courbure de Gauss de $\mathcal{S}$ au point $u(x)$:

$$\boxed{K = k_1 k_2 = \det h = \frac{\det B}{\det g}}$$

Lemme $\boxed{B_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, n \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial n}{\partial x^j} \right\rangle}$

Preuve $\frac{\partial u}{\partial x^i} \in T_u \mathcal{S} \perp n \iff \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, n \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, n \right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, n \right\rangle}_{B_{ij}} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial n}{\partial x^j} \right\rangle$$

Lien (et corollaire) avec (e_1, e_2, e_3), sachant $e_3 = n$
et $\omega^a_b = \langle de_b, e_a \rangle$

$$\left(du = \alpha^j_i \, e_j \, dx^i \right)$$

$$de_3 = \omega_3^1 \, e_1 + \omega_3^2 \, e_2 + \cancel{\omega_3^3} \, e_3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, de_3 \right\rangle} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, e_1 \right\rangle \omega^1_3 + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, e_2 \right\rangle \omega^2_3$$

$$= \alpha^1_i \, \omega^1_3 + \alpha^2_i \, \omega^2_3 = -\alpha^1_i \, \omega^3_1 - \alpha^2_i \, \omega^3_2$$

$$= \boxed{-\alpha^k_i \, \omega^3_k}$$

Lemme $\Rightarrow \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial e_3}{\partial x^j} \right\rangle = - B_{ij}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, de_3 \right\rangle} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial e_3}{\partial x^j} dx^j \right\rangle = -B_{ij}\, dx^j.$$

$$= -\alpha_i^k h_{k\ell} \underbrace{\alpha_j^\ell dx^j}$$

$$= \boxed{-\alpha_i^k h_{k\ell}\, \alpha^\ell}$$

Conclusion : $\boxed{-\alpha_i^k\, \omega_k^3} = \boxed{-\alpha_i^k h_{k\ell}\, \alpha^\ell}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_k^3 = h_{k\ell}\, \alpha^\ell}$$

Matriciellement
$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Conclusion : toutes les formes ω_b^a s'obtiennent à partir de α^a et h
sauf $\omega_2^1 = -\omega_1^2$

"racine carrée de g" "seconde forme fond."

Courbe tracée sur $\mathcal{Y}$: $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, plongement normal $\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = 1$
$s \mapsto \gamma(s)$

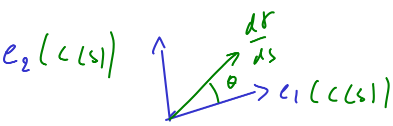
et $\forall s,\ \gamma(s) \in \mathcal{Y}$

$u : \Omega \to \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^3$ plongement, (e_1, e_2, e_3) : repère mobile orthonormé direct associé à u.

$\exists c : I \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$ t.q. $\boxed{u \circ c = \gamma}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= du_c\left(\frac{dc}{ds}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \alpha^i\left(\frac{dc}{ds}\right) e_i \end{aligned}}$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "c"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & \Omega \arrow[r, "u"] & \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Or (e_1, e_2) est orthonormé $\Rightarrow \left[\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = 1 \Leftrightarrow \left(\alpha^1\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)^2 + \left(\alpha^2\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)^2 = 1 \right]$



On peut aussi poser $\begin{cases} \alpha^1\left(\frac{dc}{ds}\right) = \cos\theta(s) \\ \alpha^2\left(\frac{dc}{ds}\right) = \sin\theta(s) \end{cases}$

Donc $\frac{d\gamma}{ds} = \cos\theta(s)\, e_1(c(s)) + \sin\theta(s)\, e_2(c(s))$

$$de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \quad + \cancel{\omega_1^1}\, e_1$$

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{d\theta}{ds}\left(-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2\right)$$
$$+ \cos\theta\left(\omega_1^2\left(\frac{dc}{ds}\right) e_2 + \omega_1^3\left(\frac{dc}{ds}\right) e_3\right)$$
$$+ \sin\theta\left(\omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right) e_1 + \omega_2^3\left(\frac{dc}{ds}\right) e_3\right)$$

$$= \left(-\frac{d\theta}{ds} + \omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)\sin\theta\, e_1 + \left(\frac{d\theta}{ds} - \omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)\cos\theta\, e_2$$
$$+ \left(\omega_1^3\left(\frac{dc}{ds}\right)\cos\theta + \omega_2^3\left(\frac{dc}{ds}\right)\sin\theta\right) e_3$$

Donc
$$\frac{d\gamma^2}{ds^2} = \left(\frac{d\theta}{ds} - \omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)\left(-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2\right)$$
$$+ \left(\omega_1^3\left(\frac{dc}{ds}\right)\alpha^1\left(\frac{dc}{ds}\right) + \omega_2^3\left(\frac{dc}{ds}\right)\alpha^2\left(\frac{dc}{ds}\right)\right) e_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{d\gamma^2}{ds^2}, n\right\rangle \left(= B\left(\frac{dc}{ds}, \frac{dc}{ds}\right)\right) = \omega_i^3\left(\frac{dc}{ds}\right)\alpha^i\left(\frac{dc}{ds}\right)}$$

Courbure normale

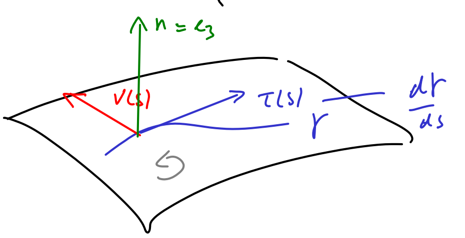
$$\boxed{= h_{ij}\, \underbrace{\alpha^i\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)}\, \underbrace{\alpha^j\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)}}$$

coordonnées de $\frac{d\gamma}{ds}$ dans (e_1, e_2)

Projection orthogonale de $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ sur $T_\gamma \Sigma$:

$$\left.\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right|_{T_\gamma \Sigma} = \left(\frac{d\theta}{ds} - \omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right)\right)\underbrace{\left(-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2\right)} = k_g\, \nu(s)$$

$\nu(s)$ vecteur normal à $\frac{d\gamma}{ds}$ dans $T_\gamma \Sigma$.



$$\boxed{k_g = \frac{d\theta}{ds} - \omega_2^1\left(\frac{dc}{ds}\right)}$$

courbure géodésique.

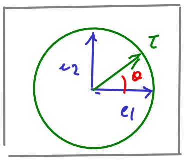
Définition Une courbe géodésique sur Σ est une courbe dont la courbure géodésique est nulle.

($\Longleftrightarrow$ $\frac{d^2\gamma}{ds^2} \perp T_\gamma \Sigma$ si γ est une paramétrisation normale)

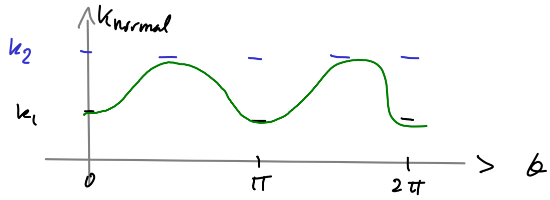
Cas où (e_1, e_2) est tel que $h = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ e_1, e_2 engendrent les directions principales

si $\dfrac{d\gamma}{ds} = \alpha^i \left(\dfrac{dc}{ds}\right) e_i = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 = \tau(s)$

$$K_{normal} = (\cos\theta \ \sin\theta) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta .$$



Try



Un mot sur l'existence des repère mobiles. partant de $u : \Omega \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$

1er procédé de construction (orthonormalisation de Schmidt)

$$e_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x^1}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x^1} \right\|}, \quad e_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x^2} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^2}, e_1 \right\rangle e_1}{\| \cdot \|}$$

2ème procédé (dual)

$$g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = g_{11}\left(dx^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} dx^2\right) \otimes \left(dx^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} dx^2\right) + \frac{\det g}{g_{11}} dx^2 \otimes dx^2$$

$(\det g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21})$

$$= \alpha^1 \otimes \alpha^1 + \alpha^2 \otimes \alpha^2$$

où $\alpha^1 = \sqrt{g_{11}} \left(dx^1 + \dfrac{g_{12}}{g_{11}} dx^2\right)$ $\quad \alpha^2 = \sqrt{\dfrac{\det g}{g_{11}}}\, dx^2$ $\to$ $\boxed{(\alpha^1, \alpha^2) = \text{base de } (\mathbb{R}^2)^*}$

$\to$ base de $\mathbb{R}^2$, duale de (α^1, α^2) : $\begin{cases} E_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0\right) \\ E_2 = \sqrt{\dfrac{g_{11}}{\det g}} \left(\dfrac{-g_{12}}{g_{11}}, 1\right) \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} e_1 = du(E_1) \\ e_2 = du(E_2) \end{cases}$

3) Tous les repères mobiles : soit $\theta \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$

$$(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \ , \ -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2).$$