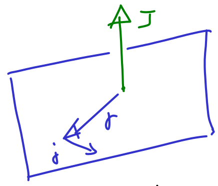
Il y aura un nouveau petit devoir à faire chez vous et à rendre le mardi 9 MARS,
de PRÉFÉRENCE sur papier et en TD à Sarah Houver (à défaut su moodle)

Dernière séance : Résolution du "problème à deux corps" à partir de $\boxed{m\ddot{\gamma} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma}$

- $J = m\gamma\wedge\dot{\gamma}$ est constant dans $\mathbb{R}^3$ (moment cinétique angulaire)
- le mouvement dans le plan orthogonal à J ($\gamma \perp m\gamma\wedge\dot{\gamma}$)
- On étudie en coordonnées polaires

$$\gamma = \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



(dans des coordonnées dans lesquelles $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_3 \end{pmatrix}$)

→ $\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}}$ et $\boxed{J_3 = m r^2 \dot{\theta}}$ = Constante (c'est aussi une constante d'intégration)

équation en r.

→ Ne pas chercher $t \mapsto r(t)$ mais $\theta \mapsto r(\theta)$

⇒ $\boxed{r = \frac{J_3}{GMm^2/J_3 + am\cos(\theta-\varphi)}}$ Forme : $\boxed{r = \frac{eh}{1+e\cos(\theta-\varphi)}}$

constantes d'intégration : a et φ.

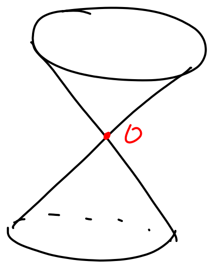
Deux constantes d'intégration : φ et e.

objet connu : $\boxed{\text{conique}}$

Les coniques : plein de définitions différentes.

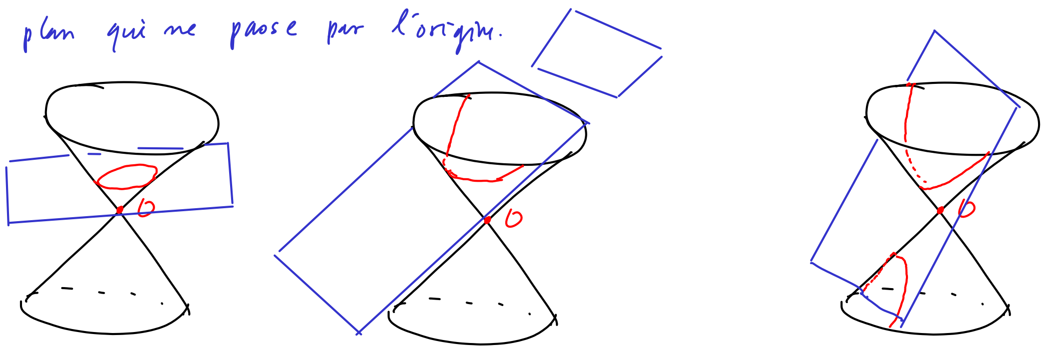
1) Intersection d'un cône avec un plan

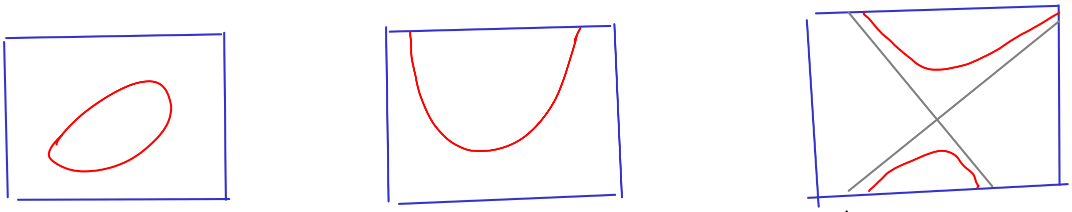
$$C = \text{Surface} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 = z^2\}$$



dans l'espace euclidien de dimension 3. ($\mathbb{R}^3$)

P : plan qui ne passe par l'origine.

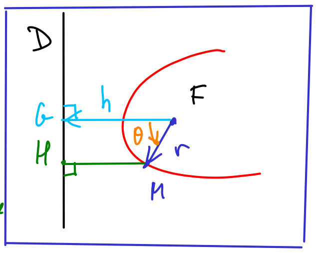




Ellipse — parabole — hyperbole (avec deux branches)

($y = ax^2$ dans de bonnes coordonnées)

2) On part d'une droite $\boxed{D}$ dans le plan $\mathcal{P}$ et d'un point $\boxed{F} \in \mathcal{P}$ (fixé).



- G : projection orthogonale de F sur D
  $d(F,D) = d(F,G) = h$
- H : projection orthogonale de M sur D
  $d(M,D) = d(M,H)$

Soit $\boxed{e} \in]0,+\infty[$ et $h = d(F,D)$.

$$\boxed{\{M \in \mathcal{P} \mid d(M,F) = e\, d(M,D)\} = \mathcal{E}}$$

- $d(M,F)$ = longueur du segment F—M $= r$
- $d(M,D)$ = longueur du segment H —— M
  $= d(M,H)$

Exercice : déterminer $\mathcal{E}$ en coordonnées polaires par rapport à F

$M \longrightarrow \left(r = d(F,M)\ ,\ \theta = \text{angle}\,(\vec{FG}, \vec{FM})\right)$

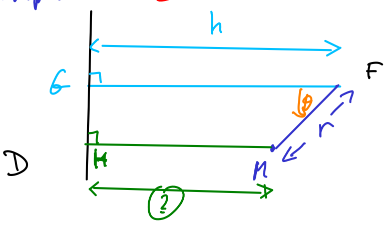
$\boxed{\begin{array}{l} r \in [0,+\infty[\\ \theta \in [0,2\pi[\end{array}}$

1) Déterminer $d(M,F)$ et $d(M,D)$ en fonction de (r,θ)

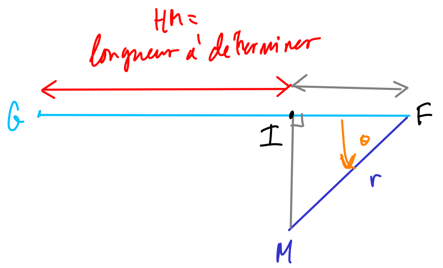
2) En déduire une description de $\mathcal{E}$ dans les coordonnées polaires (r,θ)

Réponses 1) $d(M,F) = r$

$d(M,D) = d(H,M)$

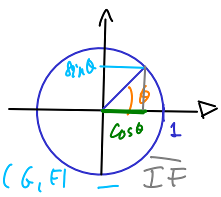


Réponse : $\boxed{h - r\cos\theta}$

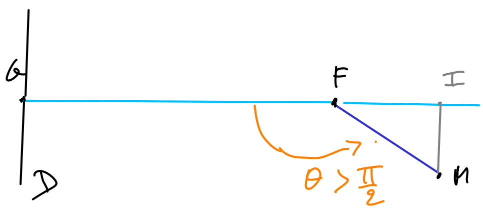


$\overline{IF} = r\cos\theta$

(longueur algébrique, comptée positivement si F est à droite de I
négativement si F — gauche — I)



$d(M,D) = d(M,H) = d(G,F) - \overline{IF} = h - r\cos\theta.$



Ici $d(M,D) > h = d(G,F)$

($\cos\theta < 0$)

$d(M,D) = h - r\cos\theta$, $\quad d(M,F) = r.$

$\mathcal{E} = \{M \mid d(M,F) = e\, d(M,D)\}.$

2) Equation en polaire de $\mathcal{C}$? Exprimer r en fonction de θ.

Réponse : $\boxed{r = \dfrac{eh}{1+e\cos\theta}}$

$$d(M,F) = e\,d(M,\mathcal{D})$$

$$\iff r = e(h - r\cos\theta) \iff r + re\cos\theta = eh$$

$$\iff r = \frac{eh}{1+e\cos\theta}$$

Exercice (à faire chez soi) : étudier $f(\theta) = \dfrac{eh}{1+e\cos\theta}$ (en fonction de e).

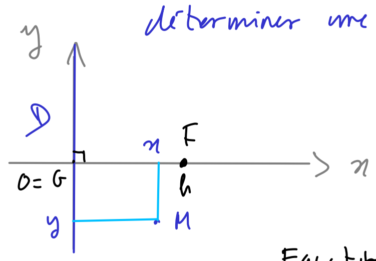
Fait : $\mathcal{C}$ est une conique.

Comparaison avec les solutions du problème à deux corps

$$r = \frac{J_3}{\frac{GMm^2}{J_3} + Am\cos(\theta-\varphi)} = \frac{J_3^2/GMm^2}{1 + \frac{J_3^2 A}{GMm}\cos(\theta-\varphi)} = \frac{eh}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$$

C'est l'équation d'une conique.

Exercice (à faire chez vous : je vous enverrai un énoncé sur moodle) : déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.



$\mathcal{D}$: $x = 0$.

$F = (h, 0)$

M a pour coordonnées (x, y)

$\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{P} \mid d(M,F) = e\,d(M,\mathcal{D}) \}$ (comme avant).

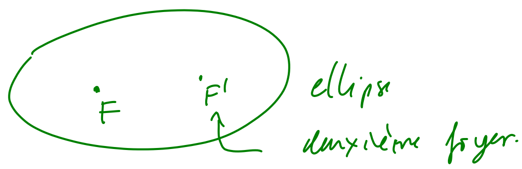
Equation cartésienne : équation sur (x,y) = CNS pour que $M \in \mathcal{C}$.

Vocabulaire : • F est un foyer de la conique (en général il y en a deux)
• e : excentricité.

$$r = \frac{eh}{1+e\cos\theta} \iff \frac{r}{e} = \frac{h}{1+e\cos\theta}$$

[Si je fais tendre e vers 0 et je dilate (homothétie) la courbe d'un rapport $\frac{1}{e}$ autour de F $\rightarrow$ $r = h$ cercle]

$\rightarrow$ conclusion : pour une excentricité nulle, on retrouve un cercle de centre F.



Fonctions de plusieurs variables

$$m\ddot{\gamma} = -\frac{GMm}{\|r\|^3}\gamma \iff \boxed{m\ddot{\gamma}^i = -\frac{GMm\,\gamma^i}{\sqrt{(\gamma^1)^2+(\gamma^2)^2+(\gamma^3)^2}^{\,3}}} \quad i=1,2,3$$

$$r = \begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\\ \gamma^3\end{pmatrix}$$

comprendre différemment.

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x^1, x^2, x^3) \longmapsto \frac{-GMm}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^{\,3}}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}$$

Newton : $\boxed{m\frac{d^2\gamma}{dt^2} = F\circ\gamma}$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$
C^2

$$F\circ\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \underbrace{\gamma(t) \longmapsto F(\gamma(t))}_{\text{Fonction de plusieurs variables}}$$

Comment comprendre le théorème de la conservation de l'énergie dans ce contexte ?

a) Rappel

$\langle \cdot , \cdot \rangle$

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, m\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma\right\rangle$$

$$\sum_{j=1}^{3} m\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d^2\gamma^j}{dt^2} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\sum_{j=1}^{3}\frac{d\gamma^j}{dt}\gamma^j$$

$$\sum_{j=1}^{3} m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma^j}{dt}\right)^2\right) = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\gamma^j)^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{d\gamma^j}{dt}\right)^2\right) = -\frac{GMm}{2\|\gamma\|^3}\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3}(\gamma^j)^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2\right) = -\frac{GMm}{2\|\gamma\|^3}\frac{d\|\gamma\|^2}{dt}$$

$$= -\frac{GMm}{\cancel{2}\|\gamma\|^{\cancel{3}\,2}}\left(\cancel{2}\cancel{\|\gamma\|}\frac{d\|\gamma\|}{dt}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{\|\gamma\|^2}\frac{d\|\gamma\|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{GMm}{\|\gamma\|}\right)$$

$\|\gamma(t)\| = h(t)$
$\|\gamma(t)\|^2 = h^2$
$\Rightarrow \frac{d\|\gamma\|^2}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$

$g(u) = u^2$
$\|\gamma\|^2 = g(\|\gamma\|)$
$\frac{d\|\gamma\|^2}{dt} = \frac{dg}{du}(\|\gamma\|)\frac{d\|\gamma\|}{dt}$
$= 2\|\gamma\|\frac{d\|\gamma\|}{dt}$

$V(r) = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2} = V'(r)$
$\Rightarrow -\frac{GMm}{\|\gamma\|^2}\frac{d\|\gamma\|}{dt} = V'(\|\gamma\|)\frac{d\|\gamma\|}{dt}$
$= \frac{d(V\circ\|\gamma\|)}{dt}$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 - \frac{GMm}{\|\gamma\|}\right) = 0$$

Donc $$\boxed{E = \underbrace{\frac{1}{2}m\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2}_{\text{cinétique}} - \underbrace{\frac{GMm}{\|\gamma\|}}_{\text{potentielle}}}$$

énergie totale est une quantité conservée.

$$E_p(t) = -\frac{GMm}{\|\gamma(t)\|}$$

b) Nouvelle méthode : dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

$$V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{GMm}{\|x\|} = \frac{-GMm}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}}$$

$$E_p(t) = (V \circ \gamma)(t) \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^3\setminus\{0\} & \xrightarrow{V} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) & \longmapsto & V(\gamma(t)) \end{array}$$

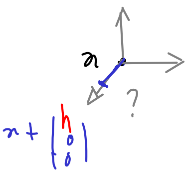
L'énergie potentielle ne dépend que de la position $\Longleftrightarrow$ E_p est la composée d'une fonction $V : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ et de $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

Fait remarquable

$$F : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto -\frac{GMm}{\|x\|^3}\, x$$

s'obtient à partir de V directement via des dérivées partielles

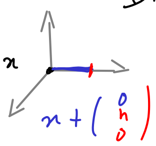
Définition Soit $U : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω : ouvert de $\mathbb{R}^3$, $x \in \Omega$, la dérivée partielle par rapport à x^1 de U en x est (si elle existe)



$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{U(x+(h,0,0)) - U(x)}{h}$$ et est notée $\frac{\partial U}{\partial x^1}(x)$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{U(x^1+h, x^2, x^3) - U(x^1, x^2, x^3)}{h} = \frac{\partial U}{\partial x^1}(x).$$

De même $\frac{\partial U}{\partial x^2}(x)$ (si ça existe) $= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{U(x^1, x^2+h, x^3) - U(x^1, x^2, x^3)}{h}$



Même histoire pour $\frac{\partial U}{\partial x^3}$

Remarque $\boxed{-\frac{\partial V}{\partial x^i} = F^i}$ où $\begin{cases} V(x) = -\frac{GMm}{\|x\|} & \text{(Fonction énergie potentielle)} \\ F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix} = -\frac{GMm}{\|x\|^3}\, x & \text{(Fonction force)} \end{cases}$

$\Downarrow$

redonne la conservation de l'énergie.