INTERACTIONS MATHÉMATIQUES—PHYSIQUE

1

Exercice 1 - Soit $\mathit{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle $\mathit{Id}(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Soit $D_{t_0} : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **linéaire**, qui satisfait

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^1(I), \quad D_{t_0}(fg) = (D_{t_0}f)g(t_0) + g(t_0)D_{t_0}g \tag{1}$$

et telle que $D_{t_0}(\mathit{Id}) = 1$.

(1) Montrer que $D_{t_0}(1) = 1$, où 1 désigne la fonction constante égale à 1 (indication : $1^2 = 1$...) ;

(2) Montrer que, pour tout polynôme $P(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n$, on a
$$D_{t_0}P = \sum_{n=1}^{N} n a_n t_0^{n-1}$$

(3) Montrer que, si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est telle que $f(t_0) \neq 0$,
$$D_{t_0}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{D_{t_0}f}{(f(t_0))^2}.$$

Exercice 2 - Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par :
— $\gamma(t) = (0, t^2)$ si $t \in]-\infty, 0[$;
— $\gamma(0) = (0, 0)$;
— $\gamma(t) = (t^2, 0)$ si $t \in]0, +\infty[$;
Montrer que γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dessiner le graphe des fonctions composantes γ_1 et γ_2. Enfin déterminer et dessiner l'image $\gamma(\mathbb{R}) = \{\gamma(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ de γ.

Exercice 3 - Soit $g > 0$ une constante positive (l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) et $m > 0$ une autre constante (la masse d'un corps). Soit $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur constant. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ une application décrivant le mouvement d'un corps de masse m On suppose que ce corps est soumis à la force constante égale à F.

(1) écrire l'équation différentielle vérifiée par les composantes de γ, à partir de la deuxième loi de Newton ;

(2) déterminer $\gamma(t)$ en fonction de la position initiale $\gamma(0) = x_0$ et de la vitesse initiale $\dot\gamma(0) = v_0$.

Exercice 4 - Soit m, M, G des constantes positives. On considère le mouvement dans l'espace de dimension 3 d'un point matériel dont la position à l'instant $t \in \mathbb{R}$ (dans un référentiel inertiel) est donnée par une application $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. On suppose que γ est solution de

$$m\ddot\gamma = -\frac{GMm\gamma}{\|\gamma\|^3} \tag{2}$$

On rappelle que $\|\gamma\|^2 = \langle\gamma, \gamma\rangle = (\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2$.

(1) montrer que $\frac{d}{dt}\left(\|\gamma\|^2\right) = 2\langle\gamma, \dot\gamma\rangle$ et $\frac{d}{dt}\left(\|\dot\gamma\|^2\right) = 2\langle\dot\gamma, \ddot\gamma\rangle$;

(2) montrer que
$$\frac{d}{dt}\left(\|\dot{\gamma}\|^2 - \frac{GM}{\|\gamma\|}\right) = 0$$
et en déduire l'existence d'une quantité, associée à γ, qui est conservée au cours du temps.

Exercice 5 - Soit A et B deux corps matériels qui évoluent dans l'espace et soit m_A la masse de A et m_B la masse de B. On suppose que la seule force subie par A est celle exercée par B sur A et que, réciproquement, la seule force subie par B est celle exercée par A sur B. Montrer que, si on admet les loi de Newton, alors

$$\frac{d}{dt}\left(m_A\dot{\gamma}_A + m_B\dot{\gamma}_B\right) = 0. \tag{3}$$

Exercice 6 - Suite de l'exercice précédent : on suppose en plus que
$$\begin{cases} m_A\ddot{\gamma_A} &= -Gm_Am_B\frac{(\gamma_A-\gamma_B)}{\|\gamma_A-\gamma_B\|^3} \\ m_B\ddot{\gamma_B} &= -Gm_Am_B\frac{(\gamma_B-\gamma_A)}{\|\gamma_B-\gamma_A\|^3} \end{cases}$$
On pose
$$c := \frac{m_A\gamma_A + m_B\gamma_B}{m_A+m_B}, \quad m := \frac{m_Am_B}{m_A+m_B} \text{ et } x := \gamma_B - \gamma_A$$
Montrer que le système précédent est équivalent à
$$\begin{cases} (m_A+m_B)\ddot{c} &= 0 \\ m\ddot{x} &= -G(m_A+m_B)m\frac{x}{\|x\|^3} \end{cases}$$

Exercice 7 - Soit $\gamma \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\forall t \in I$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ et on pose $\tau := \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$. Montrer que, pour tout $t \in I$, on peut décomposer de façon unique

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_T(t) + \ddot{\gamma}_N(t), \tag{4}$$

où $\ddot{\gamma}_T(t)$ est collinaire à $\tau(t)$ et $\ddot{\gamma}_N(t)$ est perpendiculaire à $\tau(t)$. Expliciter ces deux vecteurs en fonction de $\ddot{\gamma}(t)$ et $\tau(t)$.

Exercice 8 - Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ une application telle que $\forall t \in I$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ et $t_0 \in I$. Soit
$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(t')\|dt'.$$
Démontrer que σ est une bijection de I vers son image $\sigma(I)$. On note $J := \sigma(I)$. Montrer que la bijection réciproque $\sigma^{-1} : J \longrightarrow I$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 9 - Soit $u \in \mathscr{C}^2(J,\mathbb{R}^n)$ une paramétrisation normale et $\mathbf{t} := \frac{du}{ds}$. Dériver les deux membres de l'identité
$$\left\|\frac{du}{ds}(s)\right\|^2 = 1, \quad \forall s \in J,$$
et en déduire que $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$ est perpendiculaire à $\mathbf{t}(s)$.

Exercice 10 - En utilisant le résultat de l'exercice précédent dans le cas où $n = 2$ et en notant $(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2) = (-\mathbf{t}^2, \mathbf{t}^1)$, montrer que, si $u \in \mathscr{C}^2(J,\mathbb{R}^2)$ une immersion normale, alors

$$\frac{d^2u}{ds^2}(s) = \mathbf{k}(s)\mathbf{n}(s), \quad \forall s \in J. \tag{5}$$

Exercice 11 - Dessiner les courbes image des applications $\gamma \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}^2)$ suivantes.
- $I = [-1,1]$ et $\gamma(t) = (a+t\cos\alpha, b+t\sin\alpha)$, où $a,b,\alpha \in \mathbb{R}$ sont des constantes ;
- $I = [0,2\pi]$ et $\gamma(t) = (a+R\cos t, b+R\sin t)$, où $a,b \in \mathbb{R}$ et $R \in]0,+\infty[$ sont des constantes.

Exercice 12 - Soit $\gamma \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^n)$. Montrer la relation

$$\ddot{\gamma} = \mathbf{k}(\sigma)\,\dot{\sigma}^2\,\mathbf{n}(\sigma) + \ddot{\sigma}\mathbf{t}(\sigma)$$

pour une application $\gamma \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ décrivant un mouvement dans l'espace.

Exercice 13 - En utilisant la formule

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\ddot{\gamma}\|^2\|\dot{\gamma}\|^2 - \langle\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle^2}}{\|\dot{\gamma}\|^3}. \tag{6}$$

déterminer la courbure des courbes images des applications $\gamma \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ suivantes.

(1) $\gamma(t) = (a + t\cos\alpha, b + t\sin\alpha)$, où $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ sont des constantes ;

(2) $\gamma(t) = (a+R\cos t, b+R\sin t)$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $R \in]0, +\infty[$ sont des constantes.

(3) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$.

(4) $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, où $a, b > 0$.

(Vérifier que le résultat est bien homogène à l'inverse d'une longueur).

Exercice 14 - (Force de Laplace) Le champ magnétique est décrit par une application $B \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, s'il est statique, ou plus généralement par une application $B \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, s'il dépend du temps. Une particule chargée de charge q dont le mouvement est décrit par une application $\gamma \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ et qui interagit uniquement avec un champ magnétique est soumise à la *force de Laplace* :

$$F = q\dot{\gamma} \wedge B,$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On suppose dans la suite que B est constant et est de la forme $B(x) = (0, 0, b)$, où $b \in \mathbb{R}$ est une constante.

(1) Calculer $\frac{d^2\langle B,\gamma\rangle}{dt^2}$;

(2) en déduire que, si $\langle B, \gamma\rangle(0) = 0$ et $\frac{d^2\langle B,\gamma\rangle}{dt^2}(0) = 0$, alors $\langle B, \gamma\rangle(t)$ est nul $\forall t \in \mathbb{R}$;

(3) on suppose que $\langle B, \gamma\rangle(0) = 0$ et $\frac{d^2\langle B,\gamma\rangle}{dt^2}(0) = 0$. Montrer que γ reste dans un plan que l'on déterminera et calculer la trajectoire γ ;

(4) montrer que, d'une manière générale, l'énergie cinétique $E(t) = \frac{1}{2}m\|\dot{\gamma}\|^2$ est une quantité conservée.

Exercice 15 - Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on note $r := \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$. On considère les fonctions $F_1, F_2, F_3 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ définies par

$$F_i(x) = -\frac{x^i}{r}$$

Montrer que, pour toute paire d'indices i, j telle que $1 \leq i, j \leq 3$,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x) \tag{7}$$

Exercice 16 - Montrer que les fonctions suivantes admettent des dérivées partielles en tout point et les calculer.

(1) $f_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x^1, x^2) = \frac{1}{1+(x^1)^2+(x^2)^2}$;

(2) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f_1(x^1, x^2) = 2x^1\cos x^2$;

(3) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f_1(x^1, x^2) = -(x^1)^2\sin x^2$;

(4) qu'observe-t-on à propos de $\frac{\partial f_2}{\partial x^1}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial x^2}$?

Exercice 17 - Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$ partout. Montrer que f est constante.

Exercice 18 - Soit $V \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $H \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ définie par $H(q,p) := \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$, $\forall (q,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ (où $\|p\|^2 := (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2$). Pour chacune des fonctions $F \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ suivantes, calculer $\{H, F\}$ et interpréter l'équation $\frac{d(F\circ\gamma)}{dt} = \{H, F\}(\gamma)$:

(1) $F = q_1$ (première coordonnée de (q,p)) ;
(2) $F = p_1$ (quatrième coordonnée de (q,p)) ;
(3) $F = q_2p_3 - q_3p_2$ (première coordonnée du produit vectoriel $q \times p$, égal au moment cinétique angulaire par rapport à l'orgine) ;
(4) dans le dernier cas, que se passe-t-il quand $V(q) = v(r)$, où $v \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $r := \|q\|$?

Exercice 19 - Calculer les crochets de Poisson suivants :

(1) $\{f(q), g(q)\}$, pour $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;
(2) $\{f(p), g(p)\}$, pour $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;
(3) $\{p_i, q_j\}$ (des fonctions p_i et q_j), pour $1 \leq i, j \leq 3$;
(4) $\{p_i, f(q)\}$, pour $1 \leq i \leq 3$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;
(5) $\{q_j, g(p)\}$, pour $1 \leq j \leq 3$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Exercice 20 - On rappelle que, si $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, le *rotationnel* $\mathrm{rot}X \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et la *divergence* $\mathrm{div}X \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sont définis respectivement par :

$$\mathrm{rot}X = \nabla \wedge X = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 X_3 - \partial_3 X_2 \\ \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3 \\ \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \end{pmatrix}$$

(en notant $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour alléger les notations) et

$$\mathrm{div}X = \langle \nabla, X \rangle = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}$$

(1) montrer que, si $X \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{div}(\mathrm{rot}X) = 0$;

Une version du *lemme de Poincaré* dit que, réciproquement, si $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est tel que $\mathrm{div}X = 0$, alors $\exists A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel que $X = \mathrm{rot}A$. Nous allons montrer ce résultat dans le cas particulier où

$$X(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Soit $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ défini par $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, avec $Y_1 = -X_2$ et $Y_2 = X_1$. Montrer en utilisant la version du lemme de Poincaré dans le cours qu'il existe $V \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que $Y = \mathrm{grad}V$, i.e. $Y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}$ et $Y_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}$;
(3) en déduire qu'il existe $A \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{rot}A = X$ (on pourra expliciter les composantes de A en fonction de V).

Exercice 21 - Soient $E, B \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} & = & 0 \\ \mathrm{div}B & = & 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

(une moitié des équations de Maxwell).

(1) En utilisant (8) et le lemme de Poincaré énoncé dans l'exercice précédent, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $A(t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel [1] que, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $B(t,x) = (\mathrm{rot} A(t))(x)$.

Dans la suite on admettra que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,x) & \longmapsto & A(t)(x) \end{array}$$

est $\mathscr{C}^1$ en les quatre variables (t, x_1, x_2, x_3) et on notera $A(t,x) = A(t)(x)$. On supposera que $A \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

(2) On pose $X := E + \frac{\partial A}{\partial t}$. Montrer que $\mathrm{rot} X = 0$ et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $V(t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel [2] que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad E(t,x) = -(\mathrm{grad} V(t))(x) - \frac{\partial A}{\partial t}(t,x).$$

En conclusion, en définissant $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $V(t,x) = (V(t))(x)$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on a :

$$B = \mathrm{rot} A \quad \text{et} \quad E = -\mathrm{grad} V - \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Exercice 22 - (Calcul des variations) On considère deux fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

et on définit sur $\mathscr{E} := \{y \in \mathscr{C}^2([0,\pi], \mathbb{R}^2) |\ y(0) = (-1,0), y(\pi) = (1,0)\}$ l'action

$$\mathscr{A}(y) := \int_0^\pi \left(\frac{(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2}{2} + \alpha_1(y)\dot{y}_1 + \alpha_2(y)\dot{y}_2 \right) dt$$

(1) Calculer l'équation d'Euler–Lagrange de cette action, c'est à dire l'équation différente différentielle satisfaite par les $y \in \mathscr{E}$ qui sont points critiques de l'action $\mathscr{A}$.

(2) En posant $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$, déterminer les solutions de cette équation.

Exercice 23 - (Calcul des variations) On fixe deux points $M_0 = (a_0, b_0)$ et $M_1 = (a_1, b_1)$ dans $\mathbb{R}^2$. On définit sur $\mathscr{E} := \{y \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}^2) |\ y(0) = M_0, y(1) = M_1\}$ l'action

$$\mathscr{A}(y) := \int_0^1 \sqrt{(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2} dt$$

(1) Calculer l'équation d'Euler–Lagrange de cette action.

(2) Déterminer la forme des solutions de cette équation.

Exercice 24 - (Transformée de Legendre) On considère deux fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et on considère à nouveau l'action sur $\mathscr{E} := \{y \in \mathscr{C}^2([0,\pi], \mathbb{R}^2) |\ y(0) = (-1,0), y(\pi) = (1,0)\}$, définie par :

$$\mathscr{A}(y) := \int_0^\pi \left(\frac{(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2}{2} + \alpha_1(y)\dot{y}_1 + \alpha_2(y)\dot{y}_2 \right) dt$$

Déterminer la transformée de Legendre pour le lagrangien associé à cette action et calculer l'hamiltonien.

1. il y avait une erreur dans la première version de cet exercice dans laquelle il était demandé de montrer que $A(t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, ce qui est vrai, mais est hors de portée de ce cours.
2. même remarque

Exercice 25 - (Transformée de Legendre) On considère à nouveau l'action sur $\mathscr{E} := \{y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}^2) |\ y(0) = M_0, y(1) = M_1\}$, définie par :

$$\mathscr{A}(y) := \int_0^1 \sqrt{(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2} dt$$

(1) montrer que $\frac{\partial L}{\partial v_1}(x,v)$ et $\frac{\partial L}{\partial v_2}(x,v)$ satisfont une relation du type

$$f\left(\frac{\partial L}{\partial v_1}(x,v), \frac{\partial L}{\partial v_2}(x,v)\right) = 1,$$

pour une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

(2) en déduire que l'hypothèse de Legendre n'est pas satisfaite pour ce lagrangien.