Licence 3 - Mathématiques
LM360 ≪ Topologie et calcul différentiel ≫
Corrigé de l'épreuve du 16/12/2011

Exercice 1. 1. La formule a été démontrée en cours (cf p. 106 du polycopié).

2. Par le théorème de composition, avec $\widetilde{M}_{i,j} = (-1)^{i+j}\det((M_0 - \lambda_0 \mathrm{Id})_{i,j})$, on calcule

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda}(M_0, \lambda_0) = -\mathrm{tr}({}^t\widetilde{M}) = -\sum_{i=1}^{N} \det((M_0 - \lambda_0 \mathrm{Id})_{i,i})$$

Écrivons le polynôme caractéristique de M_0 en $\lambda_0 + x$ et développons le en x

$$\det(M_0 - (\lambda_0 + x)\mathrm{Id}) = \det((M_0 - \lambda_0\,\mathrm{Id}) - x\,\mathrm{Id}) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j.$$

On a alors $a_0 = \det((M_0 - \lambda_0)\mathrm{Id}) = 0$ et $a_1 = -\sum_{i=1}^{N} \det((M_0 - \lambda_0 \mathrm{Id})_{i,i})$. Comme λ_0 est une valeur propre simple de M_0, c'est-à-dire que 0 est une valeur propre simple du polynôme $\sum_{j=0}^{N} a_j x^j = x \sum_{j=1}^{N} a_j x^{j-1}$, on sait que $a_1 \neq 0$.

3. La fonction $\lambda \mapsto D(M, \lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice M. Le résultat recherché est donc une conséquence du théorème de fonctions implicites qui nous dit qu'il existe un ouvert Ω de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ contenant M_0, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant λ_0 et Λ une fonction C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout (M, λ) de $\Omega \times I$, λ est une solution de $D(M, \lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda = \Lambda(M)$. De plus, comme $\frac{\partial D}{\partial \lambda}(M_0, \lambda_0) \neq 0$, pour (M, λ) dans un voisinage de (M_0, λ_0), on a $\frac{\partial D}{\partial \lambda}(M, \lambda) \neq 0$. Donc la valeur $\Lambda(M)$ est une racine simple du polynôme caractéristique $\lambda \mapsto D(M, \lambda)$. On obtient ainsi que c'est une valeur propre simple de M.

4. Un calcul simple montre que les valeur propres de $M(x, y)$ sont $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. On constate que ces fonctions ne sont pas C^1 au voisinage de $(0, 0)$ bien que $(x, y) \mapsto M(x, y)$ soit C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Donc un résultat analogue à celui démontré dans la question 3 ne peut pas être vrai quand la valeur propre que l'on perturbe n'est pas simple.

Exercice 2. 1. Il suffit pour cela de calculer la différentielle de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et de vérifier qu'en tout point de $S_\pm$, elle est non nulle. On calcule

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

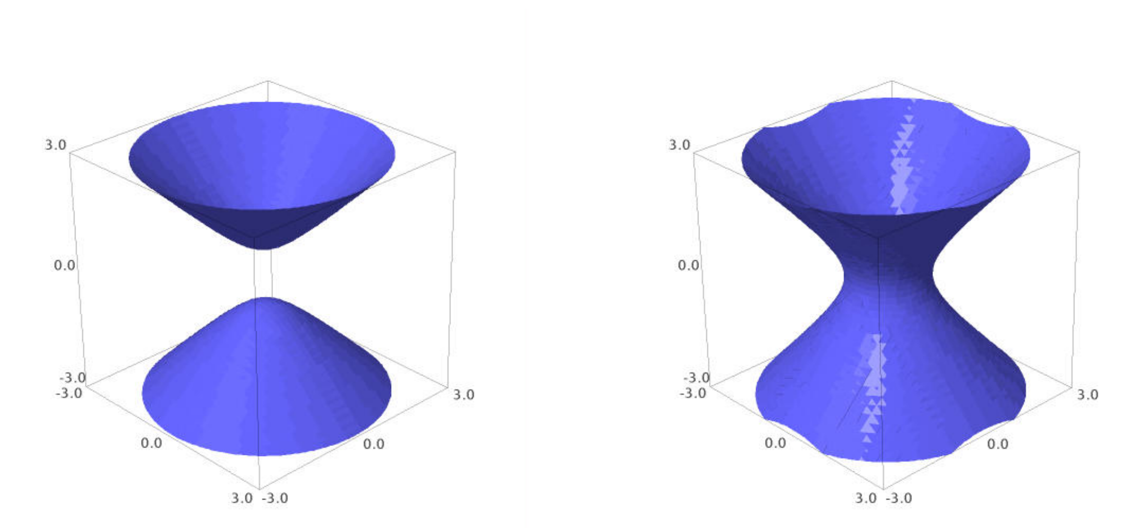
Donc $Df(x, y, z)$ est nulle si et seulement si $x = y = z = 0$; or le point $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à $S_\pm$. Donc $S_\pm$ est une surface de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculons $D\|\cdot\|^2$: $\nabla\|\cdot\|^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$. Donc (x, y, z) est un extremum de $\|\cdot\|^2$ sur $S_\pm$ si et seulement si il existe λ tel que $(x, y, -z) = \lambda(x, y, z)$ (cf Corollaire 12.3.1 du polycopié). On en déduit que $\lambda = \pm 1$ (comme $(x, y, z) \neq 0$). Si $\lambda = 1$, on a $z = 0$; si $\lambda = -1$, on a $x = y = 0$. Maintenant on remarque que si $(x, y, z) \in S_-$ alors $z \neq 0$ et que si $(x, y, z) \in S_-$ alors $(x, y) \neq (0, 0)$. Ainsi les points de S_- (resp. S_+) étant des extrema locaux de $\|\cdot\|^2$ sont $\{(0, 0, -1), (0, 0, 1)\}$ (resp. le cercle $\{(x, y, 0);\ x^2 + y^2 = 1\}$) et alors le

multiplicateur de Lagrange est donné par $\lambda_- = \lambda = -1$ (resp. $\lambda_+ = \lambda = 1$). De plus, pour $(x, y, z) \in S_\pm$, on calcule

$$(D^2 f - \lambda_\pm D^2\|\cdot\|^2)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \pm = + \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \pm = - \end{cases}$$

Le plan tangent à S_- en $(0, 0, \pm 1)$ est parallèle au plan $z = 0$ (resp. $x_0 x + y_0 y = 0$). Donc, pour $(0, 0, \pm 1) \in S_-$, on a $(D^2 f - \lambda_\pm D^2\|\cdot\|^2)(0, 0, \pm 1)(h, h) = 4\|h\|^2$ si h est dans $T_{(0,0,\pm 1)} S_-$. Le Théorème 12.3.2 du polycopié nous dit que $(0, 0, \pm 1)$ est un minimum de $\|\cdot\|^2$ sur S_-.
Le plan tangent à S_+ en $(x_0, y_0, 0)$ est parallèle au plan $x_0 x + y_0 y = 0$. Donc, pour $(x_0, y_0, 0) \in S_+$, on a $(D^2 f - \lambda_\pm D^2\|\cdot\|^2)(x_0, y_0, 0)(h, h) = 4|h_z|^2$ si $h = (h_x, h_y, h_z)$ est dans $T_{(x_0,y_0,0)} S_+$. Le Théorème 12.3.2 ne s'applique donc pas directement.
Dans le cas présent, on peut conclure (et c'est plus simple) en remarquant que $\|(x, y, z)\|^2 = f(x, y, z) + 2z^2$, donc, sur $S_\pm$, on a $\|(x, y, z)\|^2 = \pm 1 + 2z^2$, et les extrema obtenus sont des minimaux.



(a) La surface S_- (b) La surface S_+

Exercice 3. 1. Si $d = 0$ alors $(0, 0, 0) \in S_{a,b,c,d}$. Si $d \neq 0$, si a, b et c sont de même signe opposé au signe de d, alors $S_{a,b,c,d}$ est clairement vide. Sinon, l'un des coefficients (a, b, c) est du signe de d ; disons que c'est a. Alors $(\sqrt{d/a}, 0, 0) \in S_{a,b,c,d}$.

2. On calcule $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax & 2by & 2cz \end{pmatrix}$. Comme $a \cdot b \cdot c = 0$, $\nabla f(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y = z = 0$. Donc $S_{a,b,c,d} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ est une surface.
3. Si $d \neq 0$, $S_{a,b,c,d}$ est donc une surface de $\mathbb{R}^3$ comme elle ne contient $(0, 0, 0)$.
4. Soit $s_\bullet \in \{1, -1\}$ le signe de $\bullet$ pour $\bullet \in \{a, b, c, d\}$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $\varphi(x, y, z) = (\sqrt{|a/d|}x, \sqrt{|b/d|}y, \sqrt{|c/d|}z)$. φ est clairement un difféomorphisme linéaire. On vérifie de plus que $\varphi(S_{a,b,c,d}) = S_{s_a,s_b,s_c,s_d}$. Soit $s_a = s_b = s_c$ soit l'un des trois

est l'opposé des deux autres. Comme $S_{-s_a,-s_b,-s_c,-s_d} = S_{s_a,s_b,s_c,s_d}$, on voit que, quitte à permuter les variables (x, y, z) (ce qui est encore un difféomorphisme linéaire), S_{s_a,s_b,s_c,s_d} est difféomorphe à l'une des deux surfaces S_- et S_+ de l'exercice 2 ou à la sphère unité $S_0 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

On voit ainsi que

(a) $S_{a,b,c,d}$ est difféomorphe à S_- si un seul des réels $\{a, b, c\}$ est du signe de d ;

(b) $S_{a,b,c,d}$ est difféomorphe à S_+ si exactement deux des trois réels $\{a, b, c\}$ sont du signe de d ;

(c) $S_{a,b,c,d}$ est difféomorphe à S_0 si a, b, c et d sont de même signe.

5. Ni S_- ni S_+ ne sont compactes (S_+ contient la droite $\{(1, t, t); t \in \mathbb{R}\}$ et S_- contient l'hyperbole $\{(0, (t - t^{-1})/2, (t + t^{-1})/2); t \in \mathbb{R}^*\}$). S_0 est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^3$ donc compacte. Donc, par la question précédente, $S_{a,b,c,d}$ est compacte si et seulement si a, b, c et d sont de même signe.
6. Considérons $S_-^{\pm} = S_- \cap \{(x, y, z); \pm z > 0\}$ (cf figure ci-dessus). Ce sont deux ouverts de S_- (comme trace d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur S_- i.e. intersection de S_- et d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$). Ils sont non vides (car $S_-^+ = -S_-^-$ et $S_- = S_-^+ \cup S_-^- \neq \emptyset$) et $S_-^+ \cap S_-^- = \emptyset$. Donc S_- n'est pas connexe.
7. Commençons par S_0. Soit $(x, y, z) \in S_0$. On a construire un chemin dans S_0 continu connectant (x, y, z) à $(0, 0, 1)$. Comme le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arc, on peut trouver un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1/2] \to \{(a, b); a^2 + b^2 = x^2 + y^2\}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = (x, y)$ et $\tilde{\gamma}(1) = (0, \sqrt{x^2 + y^2})$. Donc le chemin $\gamma : [0, 1/2] \to S_0$ défini par $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), z)$ vérifie $\gamma(0) = (x, y, z)$ et $\gamma(1) = (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Puis le même raisonnement sur le cercle avec les points $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ et $(0, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = (0, 1)$ permet de construire un chemin joignant $(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ à $(0, 0, 1)$. On joint donc ainsi n'importe quel point de S_0 au point $(0, 0, 1)$ par un chemin continu dans S_0. Donc S_0 est connexe par arc.

   Pour S_+, on procède de même. Soit $(x, y, z) \in S_+$. On a construire un chemin dans S_+ continu connectant (x, y, z) à $(0, \sqrt{2}, 1)$. Comme $(x, y, z) \in S_+$, le chemin $\gamma : [0, 1/2] \to S_+$ défini par $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), z)$ (où $\tilde{\gamma}$ est défini ci-dessus) vérifie $\gamma(0) = (x, y, z)$ et $\gamma(1) = (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Puis on joint le point $(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ au point $(0, \sqrt{2}, 1)$ en suivant l'hyperbole $\{(0, y, z); y^2 - z^2 = 1\}$, par exemple, par le chemin

$$t \in [1/2, 1] \mapsto \gamma(t) = (0, y(t), z(t)) \text{ où } \begin{cases} y(t) &= \frac{1}{2}\left(u(t) + \frac{1}{u(t)}\right) \\ z(t) &= \frac{1}{2}\left(u(t) - \frac{1}{u(t)}\right) \end{cases}$$

   et $u(t) = (\sqrt{x^2 + y^2} + z)(t - 1) + (\sqrt{2} + 1)(t - 1/2)$ (on vérifie que $u(t)$ ne s'annule pas sur $[1/2, 1]$).
8. Comme la connexité est préservée par difféomorphisme, (a, b, c, d) est connexe dans les cas (b) et (c) de la question 4.

Exercice 4. Soit $u \in E$. Donc $K := u([0, 1])$ est compact. Donc $L := K + [-1, 1]$ est aussi compact et φ' est uniformément continue sur L. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \sup_{\substack{u \in K \\ h \in [-\eta, \eta]}} |\varphi'(u + h) - \varphi'(u)| \leq \varepsilon$$

Or $\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)h = \int_0^h [\varphi'(u+h') - \varphi'(u)]dh'$. Donc, en intégrant l'estimation ci-dessus, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall h \in]-\eta, \eta[, \quad \sup_{u \in K} |\varphi(u + h) - \varphi(u) - \varphi'(u)h| \leq \varepsilon h.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et η donné par la propriété ci-dessus. Pour $h \in E$ tel que $\|h\|_\infty < \eta$, on calcule

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u+h) - \Phi(u) - \varphi'(u)h\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\Phi(u+h)(x) - \Phi(u)(x) - \varphi'(u(x))h(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(u(x)+h(x)) - \varphi(u(x)) - \varphi'(u(x))h(x)| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \sup_{u\in K} |\varphi(u+h(x)) - \varphi(u) - \varphi'(u)h(x)| \\
&\leq \varepsilon \sup_{x\in[0,1]} |h(x)| = \varepsilon\|h\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc $u \mapsto \Phi(u)$ est différentiable en u et sa différentielle est l'application $h \mapsto \varphi' \circ u \cdot h$.