Licence 3 - Mathématiques
LM360 ≪ Topologie et calcul différentiel ≫
Épreuve du 16/12/2011

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Questions de cours

1. Démontrer que l'ensemble des fonctions bornées d'un espace métrique à valeurs dans un espace métrique complet est un espace métrique complet pour la distance de la convergence uniforme.

   Même question pour l'ensemble des fonctions continues bornées.

2. Démontrer que la boule ouverte de centre Id et de rayon 1 est incluse dans l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ si E est un espace de Banach.

3. Donner les trois définitions équivalentes d'une hypersurface de $\mathbb{R}^N$ (les démonstrations ne sont pas demandées).

Exercices :

Exercice 1. Sur l'espace des matrices $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, on rappelle que la norme euclidienne peut s'écrire p

$$\sum_{i,j} m_{i,j}^2 = \mathrm{tr}({}^tMM) \quad \text{avec} \quad \mathrm{tr}P = \sum_j P_{j,j}$$

et que pour toute forme linéaire L sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, il existe une matrice M telle qube

$$\forall H \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)\,,\ L(H) = \mathrm{tr}({}^tMH).$$

1. Démontrer que

$$D\mathrm{det}(M)(H) = \mathrm{tr}({}^t\widetilde{M}H) \quad \text{avec} \quad \widetilde{M}_{i,j} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}M_{i,j}$$

   où $M_{i,j}$ est la matrice $N-1 \times N-1$ formée par la matrice M privée de sa $i$ème ligne et de sa $j$ème colonne.

On considère maintenant l'application D de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$D(M, \lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{Id}).$$

2. Démontrer que si λ_0 est une valeur propre simple de M_0, alors $\dfrac{\partial D}{\partial \lambda}(M_0, \lambda_0) \neq 0$.

3. En déduire que si λ_0 est une valeur propre simple de M_0, il existe un ouvert Ω de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ contenant M_0, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant λ_0 et Λ une fonction C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout (M, λ) de $\Omega \times I$, λ est valeur propre de M si et seulement si $\lambda = \Lambda(M)$.

4. Considérons la fonction à valeurs dans les matrices 2×2 symétriques

$$(x, y) \mapsto M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de $M(x, y)$. Faire un commentaire.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles

$$S_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \quad \text{ou} \quad S_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

On considère la fonction $\| \cdot \|^2 :\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.

1. Montrer que S_- et S_+ sont des (hyper)surfaces de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les extrema de $\| \cdot \|^2$ sur S_+ et sur S_-. Déterminer leur nature.

Exercice 3. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a \cdot b \cdot c \neq 0$.
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble

$$S_{a,b,c,d} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax^2 + by^2 + cz^2 = d\}.$$

1. Montrer que $S_{a,b,c,d}$ est vide si et seulement si a, b et c sont de même signe et d est non nul de signe opposé.
   On supposera désormais que ces conditions ne sont pas vérifiées.
2. Montrer que $S_{a,b,c,d} \setminus \{0\}$ est une (hyper)surface de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que $S_{a,b,c,d}$ est une (hyper)surface de $\mathbb{R}^3$ si $d \neq 0$.
4. Supposons que $d \neq 0$ et que $S_{a,b,c,d}$ n'est pas vide.
   En explicitant un difféomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$, montrer que $S_{a,b,c,d}$ est difféomorphe à l'une des deux surfaces S_- et S_+ de l'exercice 2 ou à la sphère unité $S_0 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que $S_{a,b,c,d}$ soit compacte.
6. Montrer que S_- n'est pas connexe
7. Montrer que S_0 et S_+ sont connexes par arcs.
8. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que $S_{a,b,c,d}$ soit connexe.

Exercice 4 (Hors barême)**.** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On considère l'application $\Phi :\ E \mapsto E$ définie par

$$\Phi(u) = \varphi \circ u.$$

Montrer que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur E.