Licence 3 - Mathématiques
LM360 « Topologie et calcul différentiel »
Corrigé de l'épreuve du 30/01/2012

Exercices : trois des quatre exercices sont tirés des feuilles de travaux dirigés.

Exercice 1 (Ex. 10 Feuille 4). 1. Si X est compact, $X \times X$ l'est aussi ; or, la fonction $d : X \times X \to R^+$ est par définition continue. Donc elle admet un maximum sur $X \times X$ et ce maximum est atteint. Il est donc fini.

2. K est fermé comme intersection de compacts donc de fermés.
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Soit $V = X \setminus K$; il est ouvert. Donc $(V, (U_i)_{i\in I})$ est un recouvrement ouvert de X donc de K_0 qui est compact. On peut donc en extraire un sous-recouvrement de K_0 qui fini, disons, $(U_{i_j})_{1\leq j\leq n}$. Celui-ci recouvre bien sûr K. Si l'un des $(U_{i_j})_{1\leq j\leq n}$, par exemple, U_{i_1} est V alors, $(U_{i_j})_{2\leq j\leq n}$ est un recouvrement ouvert fini de K extrait de $(U_i)_{i\in I}$. Sinon $(U_{i_j})_{1\leq j\leq n}$ est un recouvrement ouvert fini de K extrait de $(U_i)_{i\in I}$. Ainsi, on a extrait de $(U_i)_{i\in I}$ un sous-recouvrement fini de K qui est donc compact.
Pour $n \geq 1$, soit $x_n \in K_n$. Donc $x_n \in K_i$ si $i \leq n$. Comme K_1 est compact, on peut extraire $(x_{\varphi(n)})_n$ de x_n qui converge dans K_1 ; soit $x_\infty \in K_1$ sa limite. Or si $n \geq p$, $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(p)} \subset K_p$ et K_p est fermé, donc $x_\infty \in K_p$ ceci pour tout p. Donc $x_\infty \in K$ et $K \neq \emptyset$.
Si $Y \subset X$, on a diam$(Y) \leq$diam(X). Donc, la suite $(\text{diam}(K_n))_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. De plus, comme diam$(K) \leq$diam(K_n) si $n \geq 1$, on a diam$(K) \leq \lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n)$. Supposons que diam$(K) < \lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $n \geq 1$, diam$(K) + \varepsilon <$diam(K_n). Pour $n \geq 1$, il existe $(x_n, y_n) \in K_n^2$ tel que diam$(K_n) = d(x_n, y_n)$. Comme, pour $n \geq 1$, $K_n \subset K_1$ qui est compact, de $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$ on peut extraire une sous-suite, disons, $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge dans K_1^2 vers, disons (x_∞, y_∞). De plus $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in K^2_{\varphi(n)} \subset \bigcap_{p\geq\varphi(n)} K_p^2$ car la suite des $(K_p)_p$ est décroissante. On en déduit que $(x_\infty, y_\infty) \in K^2$ et que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n) = d(x_\infty, y_\infty) > \varepsilon+$diam$(K)$. Ceci est absurde. On obtient donc que diam$(K) = \lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n)$.

Exercice 2 (Ex 5 Feuille 7). 1. Elles sont continues car

$$|\delta_0(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty \text{ et } |I(f)| \leq \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \|f\|_\infty.$$

De plus ceci montre que les normes de δ_0 et I sont bornées par 1. Pour f une fonction constante non nulle, on obtient $|f(0)| = \|f\|_\infty$ et $|I(f)| = \|f\|_\infty$. Donc, les normes de δ_0 et I valent 1.

2. I est continue et de norme 1 car

$$|I(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \|f\|_1 \text{ et } |I(\mathbf{1})| = 1 \int_0^1 dx = 1 = \|\mathbf{1}\|_\infty.$$

δ_0 n'est pas continue pour $(E, \|\cdot\|_1)$. En effet si $f_n(x) = e^{-nx}$, on calcule

$$|f_n(0)| = 1 = \frac{n}{1-e^{-n}} \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{n}{1-e^{-n}}\|f_n\|.$$

On voit donc qu'il ne peut exister $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in E$, $|\delta_0(f)| \leq C\|f\|_1$.

3. δ_0' est continue pour la norme N car $|\delta_0'(f)| = |f'(0)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Elle n'est pas continue pour $\|\cdot\|_\infty$. En effet, pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on calcule

$$|\delta_0'(f_n)| = |f_n'(0)| = n = n\|f_n\|_\infty.$$

4. L'application $f \mapsto T_g(f)$ est linéaire car la multiplication par la fonction g est linéaire et l'intégrale aussi.
On calcule $\left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \leq \|g\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\, dt = \|g\|_\infty \|f\|_1$.
Ceci nous dit déjà que $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.
Comme $g \in E$, le maximum de $x \mapsto |g(x)|$ est atteint sur $[0,1]$ supposons que c'est en x_0. On peut de plus supposer que $g(x_0) > 0$ (en effet, on a $T_g = -T_{-g}$ donc $\|T_g\| = \|T_{-g}\|$ et, si $g(x_0) = 0$ alors g est identiquement nulle).
Supposons que $x_0 \notin \{0,1\}$. On pose $f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x-x_0|}$ et on calcule
$$T_g(f_n) = \frac{1}{2} \int_0^1 n e^{-n|x-x_0|} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} g_n(x) dx \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} h_n(x) dx.$$
où $g_n(x) = h_n(x) g(x_0 + x/n)$ et $h_n(x) = \mathbf{1}_{[-nx_0,(1-x_0)n]}(x)$.
Comme $\|g_n\|_\infty = \|g\|_\infty$, $\|h_n\|_\infty = 1$ et que $x \mapsto e^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée pour obtenir que
$$\lim_{n \to +\infty} T_g(f_n) = g(x_0) = \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx = 1.$$
On obtient donc que $\|T_g\| = \|g\|_\infty$.
Supposons maintenant $x_0 \in \{0,1\}$, plus précisément, que $x_0 = 0$; l'autre cas se traite de la même façon. On pose alors $f_n(x) = ne^{-nx}$ et, comme ci-dessus, on montre que
$$\lim_{n \to +\infty} T_g(f_n) = g(0) = \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

5. Dire que $|T_g(f)| = \|T_g\| \cdot \|f\|_1$ revient à dire que $\left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| = \|g\|_\infty \|f\|_1$. Donc par la première inégalité de la question 4., il est nécessaire et suffisant que
$$\left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| = \int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt = \|g\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$
La deuxième égalité équivaut à $\int_0^1 |f(t)| \left(\|g\|_\infty - |g(t)|\right) dt = 0$. Or la fonction que l'on intègre ici est positive ou nulle et continue. Donc, ceci implique que pour tout t, $0 = f(t)(\|g\|_\infty - |g(t)|)$. Donc si par exemple, $|g|$ n'atteint son maximum qu'en un point, il faut que f soit identiquement nulle.
On voit ainsi que la réponse à la question est non : si $|g|$ atteint son maximum en un seul point, une telle fonction f n'existe pas.

Exercice 3. 1. Soit $F(x,y,z) = xy + xz + 2yz$ définie sur $\mathbb{R}^3$. On calcule $dF(x,y,z) = (y+z, x+2z, x+2y)$. Donc $dF(x,y,z) = (0,0,0)$ si et seulement si $(x,y,z) = (0,0,0)$. Or ce point n'appartient pas à S. S est donc une surface de $\mathbb{R}^3$.

2. Le plan tangent à S en $M(x_0,y_0,z_0)$ est le plan passant par M parallèle à $\operatorname{Ker} dF(x_0,y_0,z_0)$ soit le plan d'équation
$$(y_0+z_0)(x-x_0) + (x_0+2z_0)(y-y_0) + (x_0+2y_0)(z-z_0) = 0.$$

3. Un point $M(x,y,z)$ est un extremum local de f sur S si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} 2x = \lambda(y+z) \\ 2y = \lambda(x+2z) \\ 2z = \lambda(x+2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -2 & 2\lambda \\ \lambda & 2\lambda & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Le déterminant de cette matrice est $4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8 = 4(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2)$. Donc, pour que cette équation ait des solutions différentes de $(0,0,0)$, il faut que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$. On calcule

– quand $\lambda = \sqrt{3} - 1$: les solutions de l'équation sont de la forme $t(\sqrt{3}-1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$; un tel point est dans S si et seulement si $t^2(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-1+2) = 1$ c'est-à-dire $t = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$;
– quand $\lambda = -1$: les solutions de l'équation sont de la forme $(0,t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$; un tel point n'est jamais dans S ;
– quand $\lambda = -1-\sqrt{3}$: les solutions de l'équation sont de la forme $t(-1-\sqrt{3},1,1)$, $t \in \mathbb{R}$; un tel point n'est jamais dans S.

On obtient donc deux extrema locaux aux points $M_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}(\sqrt{3}-1,1,1)$ et le multiplicateur de Lagrange vaut $\lambda = \sqrt{3}-1$.
Remarquons que F (donc S) et f sont invariantes par symétrie par rapport l'origine. Il suffit donc de déterminer la nature de l'un des deux points $M_\pm$. On étudie f sur S au voisinage de M_+.
Les matrices hessiennes de F et f sont constantes et égales à

$$\operatorname{Hess} F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de $\operatorname{Hess} F$; le polynôme caractéristique est $x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x^2-2x-2)$; les valeurs propres sont donc
- -2 associée au vecteur propre $v_1 := (0,-1,1)$,
- $1+\sqrt{3}$ associée au vecteur propre $v_2 := (\sqrt{3}-1,1,1)$,
- $1-\sqrt{3}$ associée au vecteur propre $v_3 := (-\sqrt{3}-1,1,1)$.

Comme $\operatorname{Hess} f$ est 2 fois l'identité, les valeurs propres de $\operatorname{Hess} f - (\sqrt{3}-1)\operatorname{Hess} F$ sont
- $2-(\sqrt{3}-1)(-2) = 2\sqrt{3}$ associée au vecteur v_1,
- $2-(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}) = 0$ associée au vecteur v_2,
- $2+(\sqrt{3}-1)^2 = 6-2\sqrt{3}$ associée au vecteur v_3.

D'après la question 2., le plan tangent à S en M_+ est dirigé par les vecteurs v_1 et v_3. Donc, la matrice $\operatorname{Hess} f - (\sqrt{3}-1)\operatorname{Hess} F$ restreinte au plan tangent est strictement positive : ses valeurs propres sont supérieures ou égales à $6-2\sqrt{3}$. Ainsi, le point M_+ est un minimum de f sur F et $f(M_+) = \sqrt{3}-1$. Il en est de même pour M_-.

Exercice 4 (Ex 7 Feuille 9)**.**

1. Que (b) implique (a) est clair par la formule de Leibniz. Pour la réciproque, on applique la formule de Taylor à l'ordre n à f vérifiant (a) pour obtenir que $f(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}dt$. On vérifie par le théorème de dérivation sous le signe somme que $g(x) := \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}dt$ est $\mathcal{C}^\infty$. En effet, si on pose $g(t,x) = f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}$, alors g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour $R > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on calcule $\partial_x^k g(t,x) = f^{(n+k)}(tx)t^k(1-t)^{n-1}$; donc pour $t \in [0,1]$ et $|x| \leq R$, on a $\sup\limits_{\substack{0\leq t\leq 1 \\ |x|\leq R}} |\partial_x^k g(t,x)| \leq \sup\limits_{|x|\leq R} \|f^{(N+k)}(x)\|$ et cette fonction constante est intégrable sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme par récurrence à n'importe quel ordre.
2. On applique ici la formule de Taylor à l'ordre 2 à f en $(0,0)$ pour obtenir

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{ij}(x) \quad \text{où on a posé} \quad g_{ij}(x) = \int_0^1 \partial_{ij} f(tx)(1-t)dt.$$

Le fait que les fonction $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ se vérifie exactement comme ci-dessus.