Licence 3 - Mathématiques
LM360 « TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL »
Épreuve du 30/01/2012

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Questions de cours

1. Montrer que l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe.
2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable. Énoncer et démontrer une condition nécessaire pour que f ait un maximum local au point a.
3. Donner trois définitions équivalentes d'une hypersurface de $\mathbb{R}^d$ (les démonstrations ne sont pas demandées).

Exercices :

Exercice 1. Si (X, d) est un espace métrique non vide, on note

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{(x,y)\in X^2} d(x,y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

1. Montrer que, si X est compact, alors diam(X)$\in \mathbb{R}_+$ et il existe $(x, y) \in X^2$ tels que $\mathrm{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides de X, alors $K := \bigcap_n K_n$ est un compact non vide de X et $\mathrm{diam}(K) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(K_n)$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel $C^0([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$.

1. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

   Montrer que chacune des formes linéaires suivantes est continue et calculer sa norme.

$$\delta_0(f) = f(0); \quad I(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

2. Même question si l'on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx.$$

3. Soient à présent $F = C^1([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables sur $[0, 1]$, et N la norme définie par $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. La forme linéaire $\delta_0' : f \in F \mapsto f'(0)$ est-elle continue lorsqu'on munit F de la norme $\|\cdot\|_\infty$? Même question pour la norme N.

4. On munit de nouveau E de la norme $\| \cdot \|_1$. Pour $g \in E$, soit $T_g : f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Montrer que T_g est une forme linéaire continue et calculer sa norme d'opérateur (*on pourra commencer par le cas où la fonction g est constante*).
5. Est-ce que pour tout $g \in E$ il existe une fonction $f \in E$ non identiquement nulle telle que $|T_g(f)| = \|T_g\| \cdot \|f\|_1$?

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xy + xz + 2yz = 1\}.$$

1. Montrer que S est une hypersurface.
2. Soit $M \in S$. Donner une équation du plan tangent à S en M.
3. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ admet exactement deux minima sur S et les calculer.

Exercice 4. (Hors barème)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ et soit $n \geq 1$.
   Établir l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (a) $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
   (b) $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.
2. Soit $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $(g_{i,j})_{1<i,j\leq n} \in [\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})]^{n^2}$ telles que

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$