**Master 1 - Mathématiques**
**MM046 ≪ Équations aux dérivées partielles ≫**
**Corrigé de l'épreuve du 03/05/2017**

**Exercice 1.** Il s'agit de l'exercice 1 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD1 - suite ≫ et de l'exercice 14 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD2 ≫ ; on se reportera à leurs corrigés.

**Exercice 2.** .

1. Par définition de $\mathcal{A}(\mathbb{T})$, l'application $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique ; en effet, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors $a(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ est une série de fonction convergeant normalement dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, donc, définit une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (car c'est un espace de Banach), fonction dont les coefficients de Fourier sont les $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Ainsi, comme $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni de sa norme naturelle est un Banach, $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est une norme sur $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ muni de cet norme est un Banach.
2. Pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$, on a $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$ avec convergence normale de la série dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Donc pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$, par le théorème de convergence dominée, on a
$$\widehat{f\cdot g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)e^{-int}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(m)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(k+m-n)t}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k).$$
Donc, par le théorème de Fubini,
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f\cdot g}(n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)||\hat{g}(n-k)| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)\right)\left(|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|\right) = \|f\|_A\|g\|_A.$$
Ainsi $f\cdot g \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et $\|f\cdot g\|_A \leq \|f\|_A\|g\|_A$.
3. Il s'agit de l'exercice 8 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD3 ≫ ; on se reportera à son corrigé.
4. (a) Si $\sup_{t\in\mathbb{T}}\sup_{h\neq 0} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|^\alpha} =: C < +\infty$, alors pour $(t,t') \in \mathbb{T}^2$, on a $|f(t)-f(t')| \leq C|t-t'|^\alpha$. Ainsi $f$ est continue sur $\mathbb{T}$.
   (b) $\|\cdot\|_\alpha$ est clairement homogène de degré 1, sous-additive et définie ; c'est une norme.
   Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de $\text{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$. Comme $\text{Höl}_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui est un Banach muni de $\|\cdot\|_\infty$ et que $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_\alpha$, on sait que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers, disons, $f$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. De plus, il existe $n \geq 0$ tel que pour $k \geq 0$,$\|f_{n+k} - f_n\|_\alpha \leq 1$ c'est-à-dire que pour tout $(t,t') \in \mathbb{T}^2$, pour $k \geq 0$,
   $$|f_{n+k}(t) - f_{n+k}(t')| \leq \varepsilon|t-t'|^\alpha + |f_n(t) - f_n(t')| \leq C|t-t'|^\alpha$$
   car $f_n \in \text{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$.
   En passant à la limite $k \to +\infty$, on voit que $f \in \text{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$.
   De la même manière, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, pour tout $(t,t') \in \mathbb{T}^2$ et tout $k \geq 0$
   $$|(f_{n+k} - f_n)(t)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |(f_{n+k} - f_n)(t) - (f_{n+k} - f_n)(t')| \leq \varepsilon|t-t'|^\alpha$$
   En passant à la limite $k \to +\infty$, on voit que, $\|f - f_n\|_\alpha \leq 2\varepsilon$.
   Ainsi $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f$ dans $\text{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$.
5. Il s'agit de l'exercice 5 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD3 - suite ≫ ; on se reportera à son corrigé.

**Exercice 3.** 1. On se reportera au chapitre 3.3 du polycopié.

2. (a) Il s'agit de l'exercice 25 de la feuille de travaux dirigés « TD3 - suite » ; on se reportera à son corrigé.
   (b) Cela suit immédiatement de la question précédente et du fait que
$$\min_{D(0,R/2)} \frac{R-|x|}{R+|x|} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \max_{D(0,R/2)} \frac{R+|x|}{R-|x|} = 3.$$

3. Soit $(u_n)_n$ est suite de fonctions harmoniques sur $D(0,R)$ telle que $(u_n)_n$ converge vers $u$ localement uniformément (i.e. uniformément sur tout compact) sur $D(0,R)$. Considérons les compacts $\overline{D(z_0,r)} \subset D(0,R)$. On obtient alors que $u$ est continue sur tous ces disques fermés, donc, sur $D(0,R)$. D'autre part, par la formule de la moyenne pour les $(u_n)_n$, par le théorème de convergence dominée, quand $n \to +\infty$, on a
$$u(z_0) \leftarrow u_n(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z_0+re^{it})dt \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{it})dt.$$
Ainsi $u$ est continue sur $D(0,R)$ et y vérifie la formule de la moyenne ; elle est donc harmonique sur $D(0,R)$ en vertu du Théorème 3.85 du polycopié.

4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions harmoniques sur $D(0,R)$ (i.e. pour $x \in D(0,R)$ et $n \geq 0$, $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$) telle que $(u_n(0))_{n\geq 0}$ est bornée. Alors $(u_n(0))_{n\geq 0}$ converge. Notons que, pour $n \geq m$, $u_n - u_m$ est une fonction harmonique positive. Donc, pour $r < R$, par la question 2.a., pour $n \geq m$, on a
$$\sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |u_n(x) - u_m(x)| = \sup_{z\in\overline{D(0,r)}} (u_n(x)-u_m(x)) \leq \frac{R+r}{R-r}(u_n-u_m)(0).$$
On a donc que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de fonctions continues sur $\overline{D(0,r)}$. Elle converge donc uniformément dans $\overline{D(0,r)}$ si $r < R$ ; elle converge donc localement uniformément sur $D(0,R)$. Par la question 3, sa limite est harmonique ce qui prouve le théorème de Harnack.

**Exercice 4.** Soit $n > 0$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-n,n]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}\varphi \subset [-n,n]$. Par changement de variable $x \mapsto 1/x$, on calcule
$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &= \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\chi\left(\frac{1}{x}\right)dx\\
&= \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\varphi(0)\chi\left(\frac{1}{x}\right)dx + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\left[\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)\right]\chi\left(\frac{1}{x}\right)dx\\
&= \varphi(0)\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx + \varphi(0)\int_0^{1/n}\frac{\sin x}{x}(\chi(1/x)-1)dx + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\left[\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)\right]\chi(1/x)dx\\
&= \frac{\pi}{2}\varphi(0) + \varphi(0)\int_n^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x}(\chi(x)-1)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x}(\varphi(x)-\varphi(0))\chi(x)dx\\
&= \frac{\pi}{2}\varphi(0) + \varphi(0)\int_n^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x}(\chi(x)-1)dx + \int_0^{+\infty}\sin(1/x)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\chi(x)dx.
\end{aligned}$$
où les deux intégrales convergent, la première car $\chi - 1$ est bornée et $x^{-1}\sin(1/x) \sim x^{-2}$ en $+\infty$, la seconde car $x \mapsto x^{-1}(\varphi(x)-\varphi(0))\chi(x)$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et le sinus borné.
Ainsi
$$\langle T,\varphi\rangle = \left[\frac{\pi}{2} + \int_n^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x}(\chi(x)-1)dx\right]\varphi(0) + \int_0^{+\infty}\sin(1/x)\left(\int_0^1 \varphi'(tx)dt\right)\chi(x)dx.$$
On obtient donc qu'il existe $C > 0$ tel que $|\langle T,\varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in[-n,n]}(|\varphi(x)| + |\varphi'(x)|)$.
Ainsi $T$ définit une distribution d'ordre au plus 1.
Si $\mathrm{supp}\varphi \subset ]-\infty,0[$, la défintion de $T$ nous dit que $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Ainsi $\mathrm{supp}\, T \subset [0,+\infty[$.
Soit $x_0 \in [0,+\infty[\setminus\{n\pi; n \in \mathbb{N}\}$. Alors $\sin x_0 \neq 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\sin x \sin x_0 \geq \sin^2 x_0/2$ sur

$[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive telle que $\operatorname{supp}\phi \subset [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ et que $\phi = 1$ sur $[x_0-\varepsilon/2, x_0+\varepsilon/2]$, on pose $\varphi(x) = \phi(1/x)$. Alors $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi$ est supportée dans un voisinage de $1/x_0$

$$\sin x_0 \langle T, \varphi\rangle = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{\sin x_0 \sin x}{x} \phi(x)dx \geq \frac{\sin^2 x_0 \varepsilon}{2(x_0+\varepsilon)} > 0.$$

Ainsi $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. En prenant $\varepsilon$ petit, le voisinage de $1/x_0$ dans lequel est supporté $\varphi$ peut être rendu arbitrairement petit. Ainsi $1/x_0$ est dans le support de $T$. Donc le support de $T$ contient $]0, +\infty[\setminus\{(n\pi)^{-1}; n \in \mathbb{N}\}$ ; il contient donc l'adhérence de cet ouvert qui est $[0, +\infty[$. Ainsi, on voit que le support de $T$ est $[0, +\infty[$.
Montrons que $T$ est d'ordre exactement 1. Il suffit pour cela de montrer qu'elle n'est pas d'ordre 0 i.e. de construire $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,1]$ telle que $(\|\varphi_n\|_\infty)_n$ soit bornée et $|\langle T, \varphi_n\rangle| \to +\infty$. En effet, si elle était d'ordre 0, il existerait $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans $[0,1]$, on ait $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty$.
Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-1,1[)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ sur $]-1/2, 1/2[$. Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres dans $[2/\pi, +\infty[$. Pour $n \geq 1$, posons $\phi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \chi(c_n(x - 2k\pi - \pi/2)))$ et $\varphi_n(x) = \phi_n(1/x)$. Alors, $\phi_n$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans $\displaystyle\bigcup_{1\leq k\leq n} (2k\pi + \pi/2 + [-1/c_n, 1/c_n])$ ; ces intervalles étant deux à deux disjoints, on a $0 \leq \phi_n \leq 1$. Donc, $\varphi_n$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans $\displaystyle\bigcup_{1\leq k\leq n}\left[\frac{1}{2k\pi+\pi/2+1/c_n}, \frac{1}{2k\pi+\pi/2-1/c_n}\right]$ donc dans $[0,1]$ et $0 \leq \varphi_n \leq 1$.
On calcule

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi_n\rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\varphi_n(1/x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{2k\pi+\pi/2-1/c_n}^{2k\pi+\pi/2+1/c_n} \frac{\sin x}{x}\chi(c_n(x-2k\pi-\pi/2)))dx \\ &= \frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \frac{\cos(x/c_n)}{2k\pi+\pi/2+x/c_n}\chi(x)dx \geq \frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^n \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(\pi x/2)}{2k\pi}dx \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi c_n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}\end{aligned}$$

si on choisit $c_n = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \geq 1 \geq 2/\pi$ comme $n \geq 1$.
Pour ce choix de $(c_n)_n$, on voit que $(\varphi_n)_n$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,1]$ telle que $(\|\varphi_n\|_\infty)_n$ est bornée par 1 et $|\langle T, \varphi_n\rangle| \to +\infty$. Donc, l'ordre de $T$ est 1.

**Exercice 5.**

1. Il s'agit de l'exercice 16 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD 4 - Transformée de Fourier et distributions ≫ ; on se reportera à son corrigé.
2. La proposition 4.6.1 du polycopié ≪ Analyse réelle ≫ de N. Lerner nous dit immédiatement que la transformée de Fourier recherchée est $|\lambda|^{-d/2}e^{-id\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\lambda)/4}e^{-\pi|x|^2/\lambda}$.