Master 1 - Mathématiques
MM046 ≪ Équations aux dérivées partielles ≫
Corrigé de l'épreuve du 16/06/2017

Exercice 1. Il s'agit de l'exercice 5 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD1 - suite ≫ et de l'exercice 8 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD1 ≫ ; on se reportera à leurs corrigés.
Pour la question 2.a, on peut aussi procéder de la façon suivante. Comme

$$\lambda(E \cap (E+x)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(y)\mathbf{1}_{E+x}(y)dy,$$

on estime

$$|\lambda(E \cap (E+x)) - \lambda(E \cap (E+x'))| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(y)|\mathbf{1}_{E+x}(y) - \mathbf{1}_{E+x'}(y)|dy \leq \|\mathbf{1}_{E+x} - \mathbf{1}_{E+x'}\|_1.$$

Or, d'après le corollaire 1.69 du polycopié on sait que, lorsque x tend vers x', $\mathbf{1}_{E+x}$ tend vers $\mathbf{1}_{E+x'}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (comme E est par hypothèse de mesure finie). Ainsi $x \mapsto \lambda(E \cap (E+x))$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Il s'agit de l'exercice 7 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD3 - deuxième partie ≫ ; on se reportera à son corrigé.
Pour la question 2, on calcule

$$2\sin(jt)\sin(t/2) = \cos((j-1/2)t) - \cos((j+1/2)t) = t\int_{j-1/2}^{j+1/2} \sin(ut)du$$

ce qui donne la première formule de l'indication donnée dans l'énoncé.
Puis, on compare

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\sin(ut)}{j}du - \int_{1/2}^{n+1/2} \frac{\sin(ut)}{u}du\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \sin(ut)\frac{u-j}{uj}du\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(2j-1)} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j}\right) = 2 - \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

D'autre part, $\displaystyle\int_{1/2}^{n+1/2} \frac{\sin(ut)}{u}du = \int_{t/2}^{(n+1/2)t} \frac{\sin u}{u}du = I((n+1/2)t) - I(t/2)$ où $\displaystyle I(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}du$.
Comme $t \mapsto I(t)$ est continue et converge (vers $\pi/2$) à l'infini, on obtient la majoration souhaitée car $t \mapsto \dfrac{t}{\sin t}$ est bornée sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exercice 3.
1. On se reportera au chapitre 3.3 du polycopié.
2. On considère la fonction $v(re^{i\theta}) := u(r're^{i\theta})$ qui est harmonique sur $D(0,1)$ (car $0 < r' < 1$) et continue sur $\overline{D(0,1)}$. La formule (de représentation) de Poisson donne alors

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) = v(r(r')^{-1}e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta'})P(r/r', \theta-\theta')d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r'e^{i\theta'})P(r/r', \theta-\theta')d\theta'.\end{aligned}$$

3. Clairement, par hypothèse, u est continue dans $D(0,1)$. On peut prolonger u au secteur angulaire $\mathcal{S}_\varepsilon := \{re^{i\theta};\ 0 \leq r \leq 1,\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon\}$ par la valeur 0 sur l'arc de cercle $\{e^{i\theta};\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon\}$. L'hypothèse faite montre que ce prolongement noté également u est continu dans $\mathcal{S}_\varepsilon$. Ce secteur angulaire étant compact, on sait que u y est bornée.
   Pour $r \in [0,1[$ et $\theta \in [0,2\pi]$ fixés, par le théorème de convergence dominée, on a alors clairement
   $$\lim_{r'\to 1^-} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})d\theta' = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r'\to 1^-} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})\, P(r/r', \theta - \theta')d\theta' = 0.$$
   Pour la second intégrale, on utilise le fait que $(\rho,\theta) \mapsto P(\rho,\theta)$ est continu en $(\rho,\theta) \in [0,1[\times[0,2\pi]$, donc, bornée sur $[0,r]\times[0,2\pi]$ qui est compact.
4. Par la formule de la moyenne, on sait que $u(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r'e^{i\theta})d\theta$ pour $r' \in [0,1[$. De la question précédente, on obtient immédiatement que pour $\varepsilon \in]0,\pi[$,
   $$u(0) = \lim_{r'\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta})d\theta.$$
   L'identité (1) de l'énoncé et la question 2 nous disent alors que
   $$u(re^{i\theta}) - u(0)P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{r'\to 1^-}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})[P(r/r',\theta-\theta') - P(r,\theta)]d\theta'.$$
   Donc
   $$|u(re^{i\theta}) - u(0)P(r,\theta)| \leq \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{r'\to 1^-}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})|P(r/r',\theta-\theta') - P(r,\theta)|d\theta'.$$
   Or
   $$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})\,|P(r/r',\theta-\theta') - P(r,\theta)|d\theta' &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})\,|P(r/r',\theta-\theta') - P(r,\theta-\theta')|d\theta' \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})\,|P(r,\theta) - P(r,\theta-\theta')|d\theta' \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})d\theta'\left(\sup_{\theta'\in[0,2\pi]}|P(r/r',\theta') - P(r,\theta')| + \sup_{\theta'\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|P(r,\theta-\theta') - P(r,\theta)|\right).\end{aligned}$$
   Or, par la continuité de $(\rho,\theta)\mapsto P(\rho,\theta)$ décrite ci-avant, pour $r\in[0,1[$ et $\theta\in[0,2\pi]$, on a
   $$\lim_{r'\to 1^-}\sup_{\theta'\in[0,2\pi]}|P(r/r',\theta') - P(r,\theta')| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta'\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|P(r,\theta-\theta') - P(r,\theta)| = 0.$$
   Donc, pour $r\in[0,1[$ et $\theta\in[0,2\pi]$,
   $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{r'\to 1^-}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})|P(r/r',\theta-\theta') - P(r,\theta)|d\theta' = 0.$$
   Ainsi, pour $r\in[0,1[$ et $\theta\in[0,2\pi]$, on a $u(re^{i\theta}) = u(0)P(r,\theta)$.

Exercice 4. On écrit
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k}}\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{k}\varphi(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{k^{3/2}}\int_0^1 \varphi'\left(\frac{t}{k}\right)dt.$$

Comme $\theta \neq 0$, la série $S := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k}}$ converge. De plus la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^{3/2}} \int_0^1 \varphi'\left(\frac{t}{k}\right) dt$ converge absolument car, pour $k \geq 1$, $\left|\frac{e^{ik\theta}}{k^{3/2}} \int_0^1 \varphi'\left(\frac{t}{k}\right) dt\right| \leq \frac{1}{k^{3/2}} \sup_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|$. On obtient donc que

$$\langle T, \varphi\rangle = S\,\varphi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^{3/2}} \int_0^1 \varphi'\left(\frac{t}{k}\right) dt$$

et

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq |S|\,|\varphi(0)| + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}\right) \sup_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|.$$

Donc T est bien une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre au plus 1 et de support contenu dans $[0, 1]$.
Si supp$\varphi \cap \overline{\{1 : k; k \geq 1\}} = \emptyset$, on a clairement $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Donc le support de T est contenu dans $\overline{\{1 : k; k \geq 1\}} = \emptyset$.
Soit $k \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(1/k) = 1$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset [1/k - 1/(2k(k+1)), 1/k + 1/(2k(k+1))]$. Alors $\langle T, \varphi\rangle = e^{ik\theta}k^{-1/2} \neq 0$. Donc $\{1 : k; k \geq 1\} \subset \operatorname{supp} T$. Or le support de T est fermé. Donc $\operatorname{supp} T = \overline{\{1 : k; k \geq 1\}}$.
Montrons que T est d'ordre 1. Il suffit de montrer que T n'est pas d'ordre 0 i.e. de construire $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 2]$ telle que $(\|\varphi_n\|_\infty)_n$ soit bornée et $|\langle T, \varphi_n\rangle| \to +\infty$. En effet, si elle était d'ordre 0, il existerait $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans $[-1, 2]$, on ait $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-1, 1[)$, positive telle que $\varphi(0) = 1$. Posons

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-ik\theta}\varphi\left(2k(k+1)\left(x - \frac{1}{k}\right)\right).$$

Comme $[1/k - 1/(2k(k+1)), 1/k + 1/(2k(k+1))] \cap [1/l - 1/(2l(l+1)), 1/l + 1/(2l(l+1))] = \emptyset$ pour $k > l \geq 1$, on a $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$. De plus, $\langle T, \varphi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
Ainsi T n'est pas d'ordre 0. Elle est d'ordre au plus 1. Elle est donc d'ordre exactement 1.

Exercice 5.

1. $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{\pi x} =: \operatorname{sinc}(x)$ est une fonction infiniment dérivable et bornée ; elle définit donc une distribution tempérée. Elle est de carré intégrable, donc, sa tranformée de Fourier l'est également.
   On calcule $(\widehat{sinc})' = -2i\widehat{\sin(\pi x)} = \widehat{e^{-i\pi x}} - \widehat{e^{i\pi x}}) = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}$. La résolution de cette équation différentielle nous dit que $\widehat{sinc} = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]} + c$ où c est une constante. Or on sait que $\widehat{sinc}$ est de carré intégrable donc $c = 0$. Ainsi $\widehat{sinc} = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}$.
2. La réponse est $\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \delta_n$; elle est donnée par la formule de Poisson ; voir le théorème 4.2.3 du polycopié « Real Analysis » de N. Lerner.
3. La réponse est $i\pi(\mathbf{1}_{x<0} - \mathbf{1}_{x>0})$; voir la section 4.1.5 du polycopié « Real Analysis » de N. Lerner.
4. La réponse est $-2i\pi\mathbf{1}_{x>0}$ comme $\frac{1}{x + i0} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \operatorname{vp}(1/x) - i\pi\delta_0$; voir la section 4.1.5 du polycopié « Real Analysis » de N. Lerner.