**Master 1 - Mathématiques**

**4M030** « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »

**Examen du 03/05/2017 de 13h30 à 16h30 en salle 24-25-101**

Aucun document n'est autorisé.

Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

**Exercice 1.**

1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
   (a) Soit $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Soit $E \in \mathcal{A}$ tel que $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ $\mu$ p.p. sur $E$.
   (b) Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $\int_E f d\mu = 0$ pour tout $E \in \mathcal{A}$. Montrer que $f = 0$ $\mu$-p.p. sur $X$.
   (c) Soit $f$ $\mu$-intégrable à valeurs réelles telle que $\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$.
   Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha f = |f|$ $\mu$ p.p. sur $X$.
2. Soit $\nu$ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$.
   (a) Montrer que $\nu \ll |\nu|$ et que $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ est de module égal à 1, $|\nu|$ p.p.
   (b) Montrer que $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ pour tout $E \in \mathcal{A}$.
   (c) Montrer que, pour $f \in L^1(|\nu|)$, on a $\left|\int f d\nu\right| \leq \int |f| d|\nu|$.

**Exercice 2.** On note $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions intégrable sur $\mathbb{T}$ dont la série des coefficients Fourier de Fourier converge absolument i.e. $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f\|_A := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ qui en fait un espace de Banach.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ alors $f \cdot g \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et que $\|f \cdot g\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$.
3. Montrer que si $f$ est une fonction absolument continue sur $\mathbb{T}$ telle que $f' \in L^2(\mathbb{T})$ alors $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et
$$\|f\|_A \leq \|f\|_1 + \sqrt{2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}} \|f'\|_2.$$
4. Soit $\alpha \in ]0, 1]$. On dit que $f$, une fonction sur $\mathbb{T}$, est Hölder d'ordre $\alpha$ si
$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{h\neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} < +\infty.$$
   On note alors $f \in \mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$.
   (a) Montrer qu'une fonction dans $\mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$ est continue sur $\mathbb{T}$.
   (b) Pour $f \in \mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$, on pose $\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{h\neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha}$.
   Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $\mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$ qui en fait un espace de Banach.
5. On veut montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $\mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}(\mathbb{T})$ et que $\exists C > 0$ t.q. $\|f\|_A \leq C\|f\|_\alpha$ pour $f \in \mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$.
   (a) Pour $h > 0$, on définit $g_h(t) = f(t+h) - f(t-h)$.
   Montrer que
$$4\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)|^2 |\hat{f}(n)|^2 = \|g_h\|^2_{L^2(\mathbb{T})}.$$
   (b) En déduire que, si $f \in \mathrm{Höl}_\alpha(\mathbb{T})$, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2_\alpha h^{2\alpha}$.

(c) En posant $h_m := \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^m}$ pour $m \geq 0$, vérifier que $\displaystyle\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \leq 2h_m^{2\alpha} \|f\|_\alpha^2$.

(d) Montrer que $\displaystyle\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \leq 2^{(m+2)/2} h_m^\alpha \|f\|_\alpha$.

(e) Conclure.

**Exercice 3.** 1. Rappeler la définition du noyau de Poisson (dans $\mathbb{R}^2$).

2. Soit $u$ une fonction harmonique positive ou nulle sur le disque ouvert $D(0,R)$ $(R > 0)$.

(a) Montrer l'inégalité de Harnack suivante : pour $|x| < R$, on a

$$\frac{R - |x|}{R + |x|} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{R - |x|} u(0)$$

On pourra commencer par raisonner sur les disques $\overline{D(0,R')}$ pour $0 < R' < R$.

(b) En déduire que

$$\sup_{D(0,R/2)} u \leq 9 \inf_{D(0,R/2)} u.$$

3. Montrer que si $(u_n)_n$ est suite de fonctions harmoniques sur $D(0,R)$ telle que $(u_n)_n$ converge vers $u$ localement uniformément (i.e. uniformément sur tout compact) sur $D(0,R)$, alors $u$ est harmonique sur $D(0,R)$.

4. Déduire des questions 2 et 3 le théorème de Harnack, à savoir,

**Théorème.** *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions harmoniques sur $D(0,R)$ (i.e. pour $x \in D(0,R)$ et $n \geq 0$, $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$) telle que $(u_n(0))_{n \geq 0}$ est bornée.*
*Alors, il existe $u$ harmonique sur $D(0,R)$ telle que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $u$ localement uniformément sur $D(0,R)$.*

**Exercice 4.** Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, la limite suivante existe

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{y \to +\infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

et qu'elle définit une distribution sur la droite réelle dont on déterminera le support et l'ordre.

**Exercice 5.** Après en avoir justifié l'existence, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ où $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ; on pourra commencer par calculer $(\partial_x + i\partial_y)\left(\dfrac{1}{z}\right)$.
2. $x \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{-\pi\lambda|x|^2}$ où $\lambda$ est un nombre complexe non nul de partie réelle positive ou nulle.