Master 1 - Mathématiques

4M030 « ANALYSE RÉELLE, ANALYSE HARMONIQUE ET DISTRIBUTIONS DE SCHWARTZ »

Examen du 16/06/2017 de 08h30 à 11h30 en salle 24-34-107

Aucun document n'est autorisé.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}^d$.

(a) Supposons que la suite est croissante i.e. $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$.
Montrer que $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n)$.
Indication : on exprimera chaque E_n comme réunion d'ensembles disjoints.

(b) Supposons que la suite est décroissante i.e. $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \cdots$ et que l'un au moins l'un des ensembles E_n est de mesure finie.
Montrer que $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n)$.

(c) Donner un contre-exemple à l'énoncé précédent si aucun des ensembles E_n n'est de mesure finie.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure de Lebesgue finie.

(a) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda(E \cap (E + x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que $\lambda(E) > 0$.
Montrer que $E - E := \{e - f : (e, f) \in E \times E\}$ contient un voisinage de zéro.

Exercice 2 (Phénomène de Gibbs)**.** On considère la fonction 2π-périodique définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = \pi - x$ si $x \in]0, 2\pi[$. Pour $n \geq 1$, posons $S_n(g)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)e^{ikt}$.

1. Discuter la convergence de $(S_n(g)(t))_{n\geq 1}$ suivant la valeur de t.
2. Montrer que $\sup_{-\pi\leq t\leq\pi} |S_n(g)(t)| < +\infty$.
   Indication : on pourra vérifier que
   $$\frac{\sin t/2}{t/2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(jt)}{j} = \sum_{j=1}^{n} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\sin(ut)}{j} du$$
   et comparer cette dernière somme à l'intégrale $\int_{1/2}^{n+1/2} \frac{\sin(ut)}{u} du.$
3. Montrer que $\frac{\partial}{\partial t}(S_n(g)(t) - g(t)) = D_n(t)$ où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet.
4. Montrer que, sur $[0, 2\pi[$, la fonction $t \mapsto \Delta_n(t) := S_n(g)(t) - g(t)$ atteint son plus petit maximum local au point $\frac{2\pi}{2n+1}$.

5. Calculer $\lim_{n\to\infty} \Delta_n\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ et conclure.

Exercice 3. On veut montrer que si $u : D(0,1) \to \mathbb{R}^+$ est harmonique et positive dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ et vérifie que, pour tout $\theta \neq 0$, $\lim_{\substack{\theta'\to\theta \\ r\to 1^-}} u(re^{i\theta'}) = 0$ alors $u(re^{i\theta}) = u(0)P(r,\theta)$ où $(r,\theta) \mapsto P(r,\theta)$ est le noyau de Poisson pour le disque unité $D(0,1)$.

1. Rappeler la définition du noyau de Poisson.
2. Soit $u : D(0,1) \to \mathbb{R}$ harmonique. Montrer que, pour $0 \leq r < r' < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a
$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r'e^{i(\theta')})P(r/r', \theta - \theta')d\theta'. \tag{1}$$
3. On suppose dorénavant qu'en plus d'être harmonique dans le disque unité ouvert $D(0,1)$, u est positive et vérifie que, pour tout $\theta \neq 0$, $u(re^{i\theta'}) \to 0$ quand $r \to 1^-$ et $\theta' \to \theta$.
Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$, $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a
$$\lim_{r'\to 1^-}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} u(r'e^{i\theta'})d\theta' = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r'\to 1^-}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} u(r'e^{i\theta'}) \cdot P(r/r', \theta-\theta')d\theta' = 0.$$
4. En déduire que $u(re^{i\theta}) = u(0)P(r,\theta)$ pour $re^{i\theta} \in D(0,1)$.

Exercice 4. Soit $\theta \neq 0$. Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, la limite suivante existe
$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k}}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)$$
et qu'elle définit une distribution sur la droite réelle dont on déterminera le support et l'ordre.

Exercice 5. Après en avoir justifié l'existence, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \delta_n$;
3. $\mathrm{vp}\,(1/x)$;
4. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{1}{x+i\varepsilon}$.