Master 1 - Mathématiques

MM030 ≪ Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz ≫

Corrigé de l'épreuve du 16/05/2018

Exercice 1. Il s'agit de l'exercice 8 de la feuille de travaux dirigés ≪ TD3 - Analyse Harmonique bis ≫, du Théorème 3.64 du polycopié et des remarques qui le suivent..

Exercice 2.

1. Voir le polycopié.
2. Dans ce cas $\hat{\mu}(-n) = \overline{\hat{\mu}(n)}$. Le résultat est immédiat.
3. Comme μ n'est pas à valeurs réelles, on sait que $|\mu|(\mathbb{T}) > 0$. On rappelle que $d\mu = h\,d|\mu|$ est la décomposition polaire de μ ; on a $|h| = 1$ $|\mu|$-pp.

   (a) Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e^{ikx}$, on a $\widehat{f\,d\mu}(n) = \displaystyle\sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)\widehat{d\mu}(n-k)$. Donc, l'assertion suit du fait qu'une combinaison linéaire finie de suites tendant vers 0 tend aussi vers 0.

   (b) Les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues (sur $\mathbb{T}$) pour la norme uniforme. De plus, si f et g sont continues sur $\mathbb{T}$, alors

   $$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f\,d\mu}(n) - \widehat{g\,d\mu}(n)| &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{T}} (f-g)(\theta)e^{in\theta}d\mu(\theta) \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{T}} (f-g)(\theta)e^{in\theta}h(\theta)d|\mu|(\theta) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |(f-g)(\theta)|d|\mu|(\theta \leq \|f-g\|_\infty |\mu|(\mathbb{T}). \end{aligned} \tag{1}$$

   Ainsi

   $$\limsup_{n\to\pm\infty} |\widehat{f\,d\mu}(n)| \leq \limsup_{n\to\pm\infty} |\widehat{g\,d\mu}(n)| + \|f-g\|_\infty |\mu|(\mathbb{T}).$$

   Par la question précédente, pour $\varepsilon > 0$ et g, un polynôme trigonométrique, tel que $\|f-g\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{|\mu|(\mathbb{T})}$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |\widehat{f\,d\mu}(n)| \leq \varepsilon$. Ici ε est arbitraire, donc $\limsup_{n\to+\infty} |\widehat{f\,d\mu}(n)| = \lim_{n\to+\infty} |\widehat{f\,d\mu}(n)| = 0$.

   (c) Comme $|\mu|(\mathbb{T}) < +\infty$, une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ borélienne bornée est $|\mu|$-intégrable. De plus, par le théorème 1.34 du polycopié, la mesure $|\mu|$ est régulière. Donc, par le théorème 1.67, f est limite dans $L^1(d|\mu|)$ d'une suite de fonctions continues $(f_m)_m$. En reprenant (1), on calcule $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f\,d\mu}(n) - \widehat{f_m\,d\mu}(n)| \leq \|f-f_m\|_{L^1(d|\mu|)}$. Le raisonnement fait à la question 2.b donne alors que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{f\,d\mu}(n) = 0$.

   (d) Comme dit, $d\mu = h\,d|\mu|$ où h est borélienne bornée (par 1). Ainsi, en prenant $f = \overline{h}$, la question précédente nous dit que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{d|\mu|}(n) = 0$.

(e) On vient donc de voir que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{d\mu}(n) = 0$ implique $\lim_{n\to+\infty} \widehat{d|\mu|}(n) = 0$. Par la question 2, ceci garantit que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{d|\mu|}(-n) = 0$. Mais en reprenant les calculs des questions 2.a, 2.b et 2.c, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{h\, d|\mu|}(-n) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{d\mu}(-n) = 0$

Exercice 3. 1. Comme u est une fonction harmonique réelle sur $\mathbb{C}$, il existe $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est infini et

$$u(z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(a_n z^n + \overline{a_n}\,\overline{z}^n).$$

Quitte à translater u (la propriété d'harmonicité est invariante par translation comme le Laplacien l'est), on peut supposer que le point d'intersection de D_1 et D_2 est 0. Il existe donc (z_1, z_2) deux complexes de modules 1 tels que $\operatorname{Im} z_1 > 0$ et $\operatorname{Im} z_2 \geq 0$ tels que $D_i = \mathbb{R}\, z_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.
Ainsi comme u est nulle sur $D_1 \cup D_2$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{1,2\}, \quad 0 = u(tz_j) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(a_n z_j^n + \overline{a_n}\,\overline{z_j}^n)t^n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, 2\}$, on a $a_n z_j^n + \overline{a_n}\,\overline{z_j}^n = 0$.
Ainsi $\operatorname{Re} a_0 = 0$ et, soit il existe $n \geq 1$ tel que $\left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n = \left(\frac{z_2}{\overline{z_2}}\right)^n$ soit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
Dans le second cas, u est identiquement nulle. Dans le premier, $z_2 = e^{ik\pi/n} z_1$ pour un entier k. Ainsi l'angle entre D_1 et D_2 est un multiple rationnel de π.

2. On peut par exemple prendre $z \mapsto e^z + e^{\overline{z}}$ qui s'annule sur les droites $(\mathbb{R} + i\pi/2 + ik\pi)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 4. 1. On suit les idées de la preuve en dimension 1 i.e. le lemme 3.2.4 du polycopié de N. Lerner. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi\, dx = 1$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$J(\varphi): \ (x_1, x') \mapsto J(\varphi)(x_1, x') = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\varphi(t, x') - \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(u, x')du\right]\chi(t)\right) dt$$

où $x' = (x_2, \cdots, x_d)$.
Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-R, R[^d$ et $\operatorname{supp}\chi \subset]-R, R[$, alors $J(\varphi) \in \mathcal{C}_0^\infty(]-R, R[^d)$.
D'autre part, par dérivation sous le signe somme pour $\alpha_1 \geq 1$ et $\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1}$, on calcule

$$\partial_{x'}^{\alpha'} J(\varphi)(x_1, x') = J(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi)(x_1, x'),$$
$$\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x'}^{\alpha'} J(\varphi)(x_1, x') = \partial_{x_1}^{\alpha_1 - 1}\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi - \left[\int_{\mathbb{R}} \partial_{x'}^{\alpha'}\varphi(t, x')dt\right]\partial_{x_1}^{\alpha_1-1}\chi(x_1)$$

Donc, pour m arbitraire, si $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi$ dans $\mathbb{C}^m([-R,R]^d)$, on a $J(\varphi_n) \underset{n\to+\infty}{\to} J(\varphi)$ dans $\mathbb{C}^m([-R,R]^d)$. On obtient ainsi que l'application $\varphi \mapsto J(\varphi)$ est linéaire (séquentiellement) continue de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Remarquons que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $J(\partial_{x_1}\varphi) = \psi$. On définit alors $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par $\langle T, \varphi\rangle = -\langle U, J(\varphi)\rangle$ qui est une distribution par composition. On calcule

$$\langle \partial_{x_1} T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_{x_1}\varphi\rangle = \langle U, J(\partial_{x_1}\varphi)\rangle = \langle U, \varphi\rangle.$$

En vertu du théorème 3.4.13 du polycopié de N. Lerner, l'ensemble des solutions de l'équation est alors $\{T + 1 \otimes U;\ U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\}$.

2. (a) Comme (S) admet une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial x_2}, \varphi \right\rangle = -\left\langle U, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right\rangle = -\left\langle V, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_1}, \varphi\right\rangle.$$

Donc (C) est satisfaite.

(b) Supposons (C) est remplie. Par la question 1, on construit T_U telle que $\partial_1 T_U = U$. La solution cherchée doit alors vérifier $\partial_2 T = V$ et $T = T_U + 1 \otimes S$ où $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (par le théorème 3.4.13 du polycopié de N. Lerner). Il faut et il suffit donc que $V - \partial_2 T_U = 1 \otimes S'$. Or $\partial_1(V - \partial_2 T_U) = \partial_1 V - \partial_2\partial_1 T_U = \partial_1 V - \partial_2 U = 0$. En vertu du théorème 3.4.13 du polycopié de N. Lerner, on sait que $V - \partial_2 T_U = 1 \otimes W$ où $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Il suffit alors de choisir S telle que $S' = W$, équation résolue dans la question 1. L'ensemble des solutions est alors $\{T + C;\ C \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 5. 1. (a) L'application $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto |\text{Dét}(A)|^{-1}\varphi \circ A^{-1}$ est linéaire (séquentiellement) continue de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. En effet, si $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| \le R\}$ alors on a $\operatorname{supp}(\varphi \circ A^{-1}) \subset \{|x| \le \|A\|R\}$ (où $\|A\|$ est la norme matricielle de A pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$). D'autre part, pour un multi-indice α, en dérivant une composée, on calcule $\partial^\alpha(\varphi \circ A^{-1}) = \displaystyle\sum_{|\beta|=|\alpha|} a_\beta^\alpha (\partial^\beta \varphi) \circ A^{-1}$ où les coefficients $((a_\beta^\alpha))_{\alpha,\beta}$ ne dépendent que de A. Ainsi $U \circ A$ est une distribution comme composée d'une distribution par une application (séquentiellement) continue de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

(b) Pour $U \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, par changement de variable, on calcule

$$\langle U \circ A, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} U(Ax)\varphi(x)dx = |\text{Dét}(A)|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} U(x)\varphi(A^{-1}x)dx$$

ce qui est bien la définition au sens des distributions de la composition de la question 1.

(c) On calcule

$$
\begin{aligned}
p_{\alpha,\beta}(\varphi \circ A^{-1}) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\beta \partial^\alpha (\varphi \circ A^{-1})(x) \right| &\leq \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \left| a_\gamma^\alpha \right| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\beta (\partial^\gamma \varphi) \circ A^{-1}(x) \right| \\
&\leq \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \left| a_\gamma^\alpha \right| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| (Ax)^\beta (\partial^\gamma \varphi)(x) \right| \\
&\leq \sum_{\substack{|\gamma|=|\alpha| \\ |\beta|=|\alpha|}} \tilde{a}^\alpha_{\beta,\gamma} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\beta \partial^\gamma \varphi(x) \right| \\
&= \sum_{\substack{|\gamma|=|\alpha| \\ |\beta|=|\alpha|}} \tilde{a}^\alpha_{\beta,\gamma}\, p_{\beta,\gamma}(\varphi).
\end{aligned}
$$

Donc, l'application $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto |\text{Dét}(A)|^{-1} \varphi \circ A^{-1}$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et $U \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par composition.

(d) Soit $(U_j)_{j\geq 0}$, $U_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $U_j \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle U_j \circ A, \varphi \rangle = |\text{Dét}(A)|^{-1} \langle U_j, \varphi \circ A^{-1} \rangle \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ comme $\varphi \circ A^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto U \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est continue.

2. Notons que $(\mathbb{Z}^d)' = 2\pi\mathbb{Z}^d$. Par définition $\Gamma_A = A\mathbb{Z}^d$. Donc $\Gamma'_A = (A^{-1})^t (\mathbb{Z}^d)'$ (où B^t désigne la transposée de la matrice B). La formule de Poisson nous dit que

$$
\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \delta_\gamma = \sum_{\gamma'\in(\mathbb{Z}^d)'} e^{i\gamma'\cdot x}.
$$

On calcule donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma_A} \delta_\gamma = |\text{Dét}(A)|^{-1} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \delta_\gamma \right) \circ A^{-1} &= |\text{Dét}(A)|^{-1} \left(\sum_{\gamma'\in(\mathbb{Z}^d)'} e^{i\gamma'\cdot x} \right) \circ A^{-1} \\
&= |\text{Dét}(A)|^{-1} \sum_{\gamma'\in(\mathbb{Z}^d)'} \left(e^{i\gamma'\cdot x} \right) \circ A^{-1} = |\text{Dét}(A)|^{-1} \sum_{\gamma'\in\Gamma'_A} e^{i\gamma'\cdot x}.
\end{aligned}
$$

Dans la troisième égalité, on a utilisé la continuité prouvée à la question 1.c et la convergence de la somme dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour intervertir sommation et composition.

Exercice 6. 1. On consultera l'exercice 11 de la feuille ≪ TD 5 - Transformée de Fourier et distributions ≫.

2. On consultera l'exercice 15 de la feuille ≪ TD 5 - Transformée de Fourier et distributions ≫.

3. On consultera l'exercice 18 de la feuille ≪ TD 5 - Transformée de Fourier et distributions ≫.