Master 1 - Mathématiques
MM030 « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »
Corrigé de l'épreuve du 18/06/2018

Exercice 1. Il s'agit de l'exercice 2 de la feuille de travaux dirigés « TD1 - Espaces L^p »,

Exercice 2.

1. h est analytique comme produit de deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Pour voir qu'elle est bijective, on résout $h(z) = \zeta$ pour obtenir $z = -i\dfrac{\zeta+1}{\zeta-1} = h^{-1}(\zeta)$ qui est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. La propriété demandée pour h suit immédiatement de l'estimation $|h(x+iy)|^2 = \dfrac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} \leq 1$ pour $y \geq 0$.
2. On applique le corollaire 3.83 du polycopié à $u \circ h$ et $u = u \circ h \circ h^{-1}$.
3. Voir le cours.
4. Soit $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction harmonique, continue sur $\overline{\mathbb{C}^+}$ et admettant une limite à l'infini ; alors $f \circ h^{-1}$ est harmonique sur $D(0,1)$, continue sur $\overline{D(0,1)}$. Par le théorème 3.81 du polycopié, on sait que
$$f \circ h^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\right] f \circ h^{-1}(e^{i\tau})d\tau.$$
En changeant de variable
$$\tau \leftrightarrow h^{-1}(e^{i\tau}) = -i\frac{e^{i\tau}+1}{e^{i\tau}-1} = -i\frac{e^{i\tau/2}+e^{-i\tau/2}}{e^{i\tau/2}-e^{-i\tau/2}} = -\cot\tau = t$$
sur $]0,\pi[$ et $]\pi, 2\pi[$, on obtient, pour $\zeta = h^{-1}(z)$,
$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[\frac{h(t)+h(\zeta)}{h(t)-h(\zeta)}\right] f(t)\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[-i\frac{t\zeta+1}{t-\zeta}\right]\frac{f(t)}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2i}\left[\frac{t\zeta+1}{t-\zeta} - \frac{t\overline{\zeta}+1}{t-\overline{\zeta}}\right]\frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}\,\zeta}{|t-\zeta|^2} f(t)dt. \end{aligned}$$
Un noyau de Poisson sur $\mathbb{C}^+$ est donc $P_+(\zeta) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{t-\zeta}\right)$.

Exercice 3.

1. Il s'agit du Théorème 3.4.1 du polycopié de N. Lerner.
2. Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, par définition, $\langle u, \varphi_t\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x+t)dx$. Supposons que $u(x+1) = u(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, alors
$$\langle u, \varphi_{t+1}\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x+t+1)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x-1)\varphi_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_t(x)dx = \langle u, \varphi_t\rangle.$$
Donc, u définit une distribution 1-périodique. Réciproquement, si u définit une distribution 1-périodique, alors le calcul ci-dessus (pour $t = 0$) nous dit que les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto u(x-1)$ définissent la même distribution, elles sont donc identiques dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (par le lemme 3.1.7 du polycopié de N. Lerner). Ainsi $u(x+1) = u(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Comme χ est à support compact, pour tout $N > 0$, il existe $K > 0$ tel que, si $x \in]-N, N[$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(x-n) = \sum_{|n|\leq K} \chi(x-n)$. Donc $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(x-n)$ est C^∞ sur $]-N, N[$ (comme somme finie de fonctions C^∞). N étant arbitraire, la somme est $C^\infty(\mathbb{R})$. Elle est clairement 1-périodique et elle ne s'annule pas : en effet, sur $[0,1]$, elle est minorée par χ qui y est strictement positive.

4. Il suffit de poser $\chi_0(x) = \dfrac{\chi(x)}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(x-n)}$.

5. Prenons χ_0 vérifiant (1) de l'énoncé et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On peut alors écrire $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\chi_0)_n \varphi$ où la somme converge dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (elle est en fait finie) et on calcule

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T, (\chi_0)_n \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T, (\chi_0 \varphi_{-n}))_n\rangle \underset{T\ \text{1-périod}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T, \chi_0 \varphi_{-n})\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \chi_0 T, \varphi_{-n})\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

comme T est 1-périodique.
La distribution $\chi_0 T$ est à support compact. Il existe donc $N \geq 0$ tel, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $|\langle \chi_0 T, \varphi\rangle| \leq N \sup_{0\leq k\leq N} \sup_{|x|\leq N} |\varphi^{(k)}(x)|$. Ainsi pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |\langle \chi_0 T, \varphi_{-n}\rangle| &\leq N \sup_{|x|\leq N} (1+|x-n|)^{-2} \sup_{0\leq k\leq N} \sup_{|x|\leq N} |(1+|x-n|)^2 \varphi^{(k)}(x-n)| \\ &\leq N \sup_{|x|\leq N} (1+|x-n|)^{-2} \sup_{0\leq k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+|x|)^2 \varphi^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} N \sup_{|x|\leq N} (1+|x-n|)^{-2} =: C_N < +\infty$, par (1), on obtient

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_N \sup_{0\leq k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+|x|)^2 \varphi^{(k)}(x)|.$$

Ceci prouve que T est tempérée.

6. La distribution $\chi_0\, T$ étant à support compact, sa transformée de Fourier est une fonction analytique (Théorème 4.3.1 du polycopié de N. Lerner) ; sa valeur en un point est bien définie ; ainsi $\widehat{\chi_0\, T}(n)$ est bien définie. De plus, on a $\widehat{\chi_0\, T}(n) = \langle \chi_0\, T, e^{-2i\pi n\cdot}\rangle$. Soit $\tilde{\chi}_0$ vérifiant également (1) de l'énoncé. Comme $\left(e^{-2i\pi n\cdot}\right)_k = e^{-2i\pi n\cdot}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on calcule

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_0\, T}(n) &= \langle \chi_0\, T, e^{-2i\pi n\cdot}\rangle = \langle \chi_0\, T, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\tilde{\chi}_0)_k(\cdot) e^{-2i\pi n\cdot}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle\, T, (\tilde{\chi}_0 e^{-2i\pi n\cdot} (\chi_0)_{-k})_k\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle T, \tilde{\chi}_0 e^{-2i\pi n\cdot} (\chi_0)_{-k}\rangle = \langle \tilde{\chi}_0\, T, e^{-2i\pi n\cdot} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\chi_0)_{-k}\rangle = \langle \tilde{\chi}_0\, T, e^{-2i\pi n\cdot}\rangle = \widehat{\tilde{\chi}_0\, T}(n). \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \chi_0\, T, e^{-2i\pi n\cdot}\rangle$ ne dépend pas de χ_0 vérifiant (1) de l'énoncé.

7. C'est une application directe du Lemme 4.3.3 du polycopié de N. Lerner.

8. Reprenant (1), pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \chi_0 T, \varphi_{-n}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{\chi_0 T}, \check{\widehat{\varphi_{-n}}}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{\chi_0 T}, \check{\hat{\varphi}} e^{i2\pi n\cdot}\rangle \\
&\underset{\text{comme } \widehat{\chi_0 T}\check{\hat{\varphi}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi n\cdot}, \widehat{\chi_0 T}\check{\hat{\varphi}} \right\rangle \\
&\underset{\text{formule de Poisson}}{=} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n, \widehat{\chi_0 T}\check{\hat{\varphi}} \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\chi_0 T}(n)\check{\hat{\varphi}}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n)\langle e^{i2\pi n\cdot}, \varphi\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n) e^{i2\pi n\cdot}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Poisson et le fait que $\widehat{\chi_0 T}\check{\hat{\varphi}}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par le Lemme 4.3.3 du polycopié de N. Lerner.

9. Réciproquement, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{N+2}|\hat{\varphi}(n)| < +\infty$. Donc, pour $(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (2) de l'énoncé, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n)\langle e^{2i\pi nx}, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n)\hat{\varphi}(-n)$ converge absolument ce qui donne la convergence souhaitée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $x \mapsto \sum_{|n|\le N} \hat{T}(n) e^{2i\pi nx}$ est périodique pour tout N, sa limite l'est aussi.

Exercice 4. 1. On a

$$(2) \quad \varphi\left(\cos x - e^{-x}, \sin x\right) - \varphi\left(\cos x, \sin x + e^{-x}\right) = -e^{-x}\int_0^1 \left[\partial_1\varphi\left(\cos x - te^{-x}, \sin x\right) + \partial_2\varphi\left(\cos x, \sin x + te^{-x}\right)\right] dt.$$

Donc $|\varphi(\cos x - e^{-x}, \sin x) - \varphi(\cos x, \sin x + e^{-x})| \le 2e^{-x}\|\nabla\varphi\|_\infty$ ce qui garantit la convergence de l'intégrale.

2. Plus précisément, on a

$$|\varphi\left(\cos x - e^{-x}, \sin x\right) - \varphi\left(\cos x, \sin x + e^{-x}\right)| \le 2e^{-x} \sup_{\substack{|x_1|\le 3\\ |x_2|\le 3}} \max_{i\in\{1,2\}} |\partial_i\varphi(x_1,x_2)|.$$

Donc

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le 2 \sup_{\substack{|x_1|\le 3\\ |x_2|\le 3}} \max_{i\in\{1,2\}} |\partial_i\varphi(x_1,x_2)|$$

et T définit une distribution à support compact d'ordre au plus 1.

3. Pour $x \ge 0$, on définit $\varphi_1(x) = (\cos x - e^{-x}, \sin x)$ et $\varphi_2(x) = (\cos x, \sin x + e^{-x})$. Considérons les spirales $S_1 = \varphi_1(\mathbb{R}^+)$, $S_2 = \varphi_2(\mathbb{R}^+)$ et le cercle unité $\mathbb{T}$. Clairement, $\overline{S_i} = S_i \cup \mathbb{T}$.
si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est telle que son support ne rencontre pas $S_1 \cup S_2 \cup \mathbb{T}$ alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Donc le support de T est contenu dans $S_1 \cup S_2 \cup \mathbb{T}$.
Pour $N > 0$, posons $S_1^N = \varphi_1([0,N])$ et $S_2^N = \varphi_2([0,N])$. Un calcul simple donne $S_1^N \cap \mathbb{T} =$

$\varphi_1(\{x \in [0,N] \text{ t.q. } 2\cos x = e^{-x}\})$. C'est un ensemble fini ; de même $S_2^N \cap \mathbb{T}$ est fini. D'autre part, $S_1^N \cap S_2^N$ est discret. En effet, si $(x_1^n, x_2^n) \to (x_1, x_2)$ avec $(x_1^n, x_2^n) \in S_1^N \cap S_2^N$ (et $(x_1^n, x_2^n)_n \neq (x_1, x_2)$) alors $(x_1, x_2) \in S_1 \cap S_2$ et soit $\sin x_1 + e^{-x_1} = \sin x_2$ ou $\cos x_1 + e^{-x_2} = \cos x_1$. Ainsi $e^{-x_1} + e^{-x_2} = 0$ ce qui est impossible.
On peut alors considérer un point de $(S_1^N \cup S_2^N) \setminus (S_1^N \cap S_2^N)$. Supposons que ce point est dans $S_1^N \setminus S_2^N$. On choisit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ positive dont le support rencontre S_1^N mais pas S_2^N et qui vaut 1 en ce point. Alors $\langle T, \varphi\rangle > 0$. Donc ce point est dans le support de T. Ainsi $(S_1^N \cup S_2^N) \setminus (S_1^N \cap S_2^N)$ est contenu dans le support de T qui est fermé. Donc $S_1^N \cup S_2^N$ est contenu dans le support de T (comme $S_1^N \cap S_2^N$ est discret et que S_1^N et S_2^N sont connexes), ceci pour tout N. En laissant N tendre vers l'infini, on voit que $S_1 \cup S_2$ est contenu dans le support de T. L'adhérence de $S_1 \cup S_2$ est $S_1 \cup S_2 \cup \mathbb{T}$ qui est donc aussi contenue dans le support de T. Ainsi le support de T est $S_1 \cup S_2 \cup \mathbb{T}$.

4. Si T n'est pas d'ordre 1, comme son support est contenu dans le carré $\{|x_1| < 3,\ |x_2| < 3\}$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{|x_1|\leq 3 \\ |x_2| \leq 3}} |\varphi(x_1, x_2)|. \tag{3}$$

L'ensemble $M_N = \varphi_2^{-1}(S_1^N) \cup \varphi_1^{-1}(S_1^N \cap \mathbb{T})\}$ est fini comme réunion d'ensemble fini ; on écrit $M_N = \{x_1, \cdots, x_{k_N}\}$. On considère le compact

$$K_N = S_1^N \setminus \bigcup_{k=1}^{k_N} D\left((\cos x_k, \sin x_k + e^{-x_k}), \frac{1}{k_N}\right).$$

Comme $S_2 \cup \mathbb{T}$ est fermé et $K_N \cap (S_2 \cup \mathbb{T}) = \emptyset$, on a $d_N = \text{dist}(K_N, S_2 \cup \mathbb{T}) > 0$. On définit l'ouvert

$$O_N = K_N + D\left((0,0), d_N/2\right).$$

Par construction, $S_2 \cup \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^2 \setminus O_N$. Soit $\chi_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ telle que
— $0 \leq \chi_N \leq 1$,
— $\chi_N = 1$ sur le compact K_N
— $\chi_N = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus O_N$.
On calcule alors

$$\begin{aligned} \langle T, \chi_N\rangle &\underset{\text{propriété de support de } \chi_N}{=} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_N\left(\cos x - e^{-x}, \sin x\right) dx \\ &\underset{\text{comme } \chi_N \geq 0 \text{ et } \chi_N = 1 \text{ sur } K_N}{\geq} \int_{[0,N]\setminus \cup_{1\leq k\leq k_N}[x_k - 4/k_N, x_k + 4/k_N]} 1 dx \geq N - 8. \end{aligned}$$

Comme N est arbitraire et que $0 \leq \chi_N \leq 1$, ceci contredit (3) lorsque $N > C + 8$. Donc T n'est pas d'ordre 0 et elle est d'ordre inférieur ou égal à 1 ; elle est donc d'ordre exactement 1.

Exercice 5. 1. On consultera l'exemple (4.1.17) du polycopié de N. Lerner.

2. On consultera l'exercice 15 de la feuille « TD 5 - Transformée de Fourier et distributions ».
3. On consultera l'exercice 18 de la feuille « TD 5 - Transformée de Fourier et distributions ».