Master 1 - Mathématiques

4M030 « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »

Examen du 16/05/2018 de 13h30 à 16h30 en salle 14-24-107

Aucun document n'est autorisé.

Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1.

1. Rappeler les définitions des noyaux de Dirichlet D_n et de Fejér F_n.
2. On pose $L_n = \|D_n\|_1$.
   Montrer que
   $$L_n = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n+1/2}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t}dt + O(1).$$
3. Montrer que
   $$\int_{\frac{k\pi}{n+1/2}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1/2}} |\sin((n+1/2)t)|dt = \frac{2}{n+\frac{1}{2}}$$
4. Montrer que $L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$.
5. Rappeler la définition de la propriété de convergence en norme pour un espace de Banach homogène.
6. Pour tout n, calculer la limite de $(F_m * D_n)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{T})$.
7. Montrer que l'espace $L^1(\mathbb{T})$ n'admet pas la propriété de convergence en norme

Exercice 2. Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ et $(\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, ses coefficients de Fourier. Le but de l'exercice est de montrer

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{\mu}(n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to-\infty}\hat{\mu}(n) = 0. \tag{1}$$

1. Rappeler la définition des coefficients de Fourier de μ notés $(\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.
2. Montrer (1) quand μ est à valeurs réelles.
3. On suppose maintenant que μ n'est pas à valeurs réelles et $\lim_{n\to+\infty}\hat{\mu}(n) = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout polynôme trigonométrique f, on a
   $$\lim_{n\to+\infty}\widehat{f\,d\mu}(n) = 0. \tag{2}$$
   (b) En déduire que (2) reste vraie pour toute fonction $f : \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ continue
   (c) En déduire que (2) reste vraie pour toute fonction $f : \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ borélienne bornée.
   (d) En déduire que l'on a $\lim_{n\to+\infty}\widehat{|\mu|}(n) = 0$ où $|\mu|$ est la variation totale de μ.
   (e) Conclure.

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ une fonction harmonique.

1. Supposons que u s'annule sur deux droites non parallèles D_1 et D_2.
   Montrer que soit D_1 et D_2 font un angle qui est un multiple rationnel de π soit u est identiquement nulle.
2. Construire $u : \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ une fonction harmonique qui s'annule sur une infinité de droites parallèles.

Exercice 4. 1. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, trouver toutes les solutions de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = S.$$

2. Soit $(U, V) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. On considère le système

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = U; \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = V$$

   (a) Montrer que, si (S) admet une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ alors, on a

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

   (b) Réciproquement, si la condition (C) est remplie, trouver toutes les solutions de (S).

Exercice 5. Soit A une matrice $d \times d$ inversible à coefficients réels.

1. Pour $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\langle U \circ A, \varphi \rangle = |\text{Dét}(A)|^{-1} \langle U, \varphi \circ A^{-1} \rangle$$

   (a) Montrer $U \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   (b) Montrer que si $U \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ alors $U \circ A$ est la fonction L^1_{loc} obtenue par composition de U avec A.
   (c) Montrer que l'application $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \mapsto U \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est continue.
   (d) Pour $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $U \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
   (e) Montrer que $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto U \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est continue.
2. Soit $\Gamma_A = \{A \cdot \gamma;\ \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$, le réseau de $\mathbb{R}^d$ engendré par les colonnes de A.
   Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_A} \delta_\gamma = |\text{Dét}(A)|^{-1} \sum_{\gamma' \in \Gamma'_A} e^{i\gamma' \cdot x},$$

   où Γ'_A est le réseau dual de Γ_A, c'est-à-dire $\Gamma'_A = \{\gamma' \in \mathbb{R}^d;\ \forall \gamma \in \Gamma_A,\ \gamma \cdot \gamma' \in 2\pi\mathbb{Z}\}$.

Exercice 6. Après avoir brièvement justifié leurs existences, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $\text{vp}\,(1/x)$;
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^{-\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$;
3. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{i(x^2+y^2)}$;