Master 1 - Mathématiques

4M030 « ANALYSE RÉELLE, ANALYSE HARMONIQUE ET DISTRIBUTIONS DE SCHWARTZ »

Examen du 18/06/2018 de 13h30 à 16h30 en salle 14-24-107

Aucun document n'est autorisé.

Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Soit μ une mesure positive sur X. On note L^p l'espace $L^p(\mu)$. Soit $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$.

1. Soit $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$.
   (a) Montrer que $f \in L^p$ pour $p_0 \leq p \leq p_1$ et que l'on a $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta}\|f\|_{p_1}^{\theta}$ pour $0 \leq \theta \leq 1$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.
   (b) Montrer que $p \in [p_0, p_1] \mapsto \|f\|_p$ est continue.
2. Supposons $f \in L^p$ pour $p_0 < p < p_1$. Montrer que

$$f \in L^{p_0} \iff \limsup_{p \to p_0^+} \|f\|_p < +\infty \quad \text{et} \quad f \in L^{p_1} \iff \limsup_{p \to p_1^-} \|f\|_p < +\infty.$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ et $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Sur $\overline{\mathbb{C}^+}$, on considère l'application h définie par $h(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que h est une bijection bi analytique de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant $h\left(\overline{\mathbb{C}^+}\right) = \overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ et $h(\mathbb{C}^+) = D(0,1)$.
2. Montrer que u est harmonique dans $D(0,1)$ si et seulement si $u \circ h$ est harmonique sur $\mathbb{C}^+$.
3. Rappeler la définition du noyau de Poisson sur $D(0,1)$.
4. En déduire un noyau de Poisson de $\mathbb{C}^+$ i.e. une fonction, disons P_+, harmonique sur $\mathbb{C}^+$ telle que, pour $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction harmonique, continue sur $\overline{\mathbb{C}^+}$ et admettant une limite à l'infini i.e. $\displaystyle\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \overline{\mathbb{C}^+}}} f(z)$ existe, on a
   — pour $\operatorname{Im} z > 0$, on a $f(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_+(\operatorname{Re} z - t, \operatorname{Im} z) f(t)\,dt$;
   — pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\lim_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} P_+(x-t, y) f(t)\,dt$.

Exercice 3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi_t :\ x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(x+t)$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \langle T, \varphi_t \rangle$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $\dfrac{d^k}{dt^k}\langle T, \varphi_t \rangle = \left\langle T, \left(\dfrac{d^k \varphi}{dt^k}\right)_t \right\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On dit qu'une distribution T est 1-périodique si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \langle T, \varphi_t \rangle$ est 1-périodique.
   Montrer qu'une fonction localement intégrable est 1-périodique si et seulement si elle définit une distribution 1-périodique.
3. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle $\chi(x) > 0$ pour $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(x-n)$ est une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas et qui est 1-périodique.
4. En déduire qu'il existe $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_0(x-n) = 1. \tag{1}$$

5. Montrer qu'une distribution 1-périodique est tempérée.
6. Soit T une distribution 1-périodique et χ_0 construite à la question précédente.
   Pour $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $\widehat{\chi_0 T}(n)$ est bien définie et ne dépend pas de χ_0 vérifiant (1).
   On pose $\hat{T}(n) = \widehat{\chi_0 T}(n)$.
7. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^{-N} \left|\hat{T}(n)\right| < +\infty. \tag{2}$$

8. Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n) e^{2i\pi nx}$.
9. Réciproquement, montrer que si $(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes vérifiant (2) alors la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{T}(n)e^{2i\pi nx}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et définit une distribution 1-périodique.

Exercice 4. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on considère l'expression suivante

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^+} \left[\varphi\left(\cos x - e^{-x}, \sin x\right) - \varphi\left(\cos x, \sin x + e^{-x}\right)\right] dx. \tag{3}$$

1. Montrer que l'intégrale (3) converge.
2. Montrer que T ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer le support de T.
4. Calculer l'ordre de T.

Exercice 5. Après avoir brièvement justifié leurs existences, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon}$;
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^{-\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$;
3. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{i(x^2-y^2)}$;