Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

17 janvier 2019

Table des matières

Préface

Ces notes sont très largement inspirées des chapitres 2, 6 et 7 de l'ouvrage [4] et des chapitres 1, 2 et 3 de l'ouvrage [2].

Chapitre 1

Mesures de Borel positives, intégration et espaces L^p

1.1 Quelques rappels

Définition 1.1. Soit X un ensemble.

<table>
<tr>
<td>L'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X
1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;
2. si $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}$;
3. si $n \geq 1$ et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq n} V_i \in \mathcal{T}$.
$(X, \mathcal{T})$ est alors un espace topologique.</td>
<td>L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ-algèbre sur X
1. $X \in \mathcal{S}$;
2. $V \in \mathcal{S} \Longrightarrow X \setminus V \in \mathcal{S}$;
3. si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $E_i \in \mathcal{S}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{S}$.
$(X, \mathcal{S})$ est alors un espace mesurable.</td>
</tr>
</table>

L'*intérieur* d'un ensemble E, notée $\overset{\circ}{E}$, est le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble ; c'est aussi la réunion de tous les ouverts contenu dans cet ensemble. Les *fermés* sont les complémentaires des ouverts. L'*adhérence* d'un ensemble E, notée $\overline{E}$, est le plus petit fermé contenant cet ensemble ; c'est aussi l'intersection de tous les fermés contenant cet ensemble (par la définition des fermés et le 1.(c) de la définition 1.1). On dit que V est un *voisinage* du point x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$.

Définition 1.2. Un ensemble $K \subset X$ est *compact* si, de tout recouvrement ouvert de K (i.e. une famille d'ouverts $(O_j)_{j\in J}$ tels que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$), on peut extraire un sous recouvrement fini (i.e. il existe $j_1, \cdots, j_n$ dans J tels que $K \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_n}$).
Un ensemble est dit *relativement* compact s'il est inclus dans un compact.

Exercice 1.3. Montrer qu'un fermé contenu dans un compact est compact.

Définition 1.4. $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si et seulement si pour tous $(x, y) \in X^2$, il existe U voisinage de x et V voisinage de y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Théorème 1.5. *Soit X un espace de Hausdorff, $K \subset X$ un compact et $x \in X \setminus K$. Alors il existe U et V ouverts de X tels que $K \subset U$, $x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. Comme X est un espace de Hausdorff, pour chaque $y \in K$ il existe U_y voisinage de y et V_y voisinage de x tel que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $(U_y)_{y\in K}$ est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire le recouvrement fini $(U_{y_j})_{1\leq j\leq J}$ (car K est compact). Ainsi $U = \bigcup_{1\leq j\leq J} U_{y_j}$ est un ouvert contenant K et $V := \bigcap_{1\leq j\leq J} V_{y_j}$ est un ouvert contenant x. On a clairement $V \cap U = \emptyset$. □

Le complémentaire d'un compact dans un espace de Hausdorff est ouvert comme réunion des voisinages ouverts de chacun de ses points construits par le théorème 1.5. On obtient ainsi

Corollaire 1.6. *Un sous ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Exercice 1.7. Montrer que, dans un espace de Hausdorff, l'adhérence d'un sous-ensemble d'un compact est compacte.
Montrer que, dans un espace de Hausdorff, un ensemble est relativement compact (i.e. contenu dans un compact) si et seulement si son adhérence est compacte.

Théorème 1.8. *Soient $(K_i)_{i\in I}$ des compacts de X, un espace de Hausdorff tels que $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Alors il existe $\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I$ tel que $\bigcap_{1\leq j\leq n} K_{i_j} = \emptyset$.*

Démonstration. On définit l'ouvert $V_i = (K_i)^c$ et on choisit $i_0 \in I$. Comme K_{i_0} ne rencontre pas tous les $(K_i)_{i\neq i_0}$, $(V_i)_{i\neq i_0}$ est un recouvrement ouvert de K_{i_0}, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $K_{i_0} \subset \bigcup_{1\leq j\leq n} V_{i_j}$. Ainsi $\bigcap_{0\leq j\leq n} K_{i_j} = \emptyset$. □

Définition 1.9. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *localement compact* si et seulement si tout point admet un voisinage compact.

Théorème 1.10. *Soit U un ouvert de X, un espace de Hausdorff localement compact et $K \subset U$ un compact. Alors il existe un ouvert V relativement compact tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Démonstration. Comme tout point de K admet un voisinage compact, on peut trouver un recouvrement fini de K par des ouverts relativement compacts. La réunion de ces ouverts, disons, O, est ouverte relativement compacte. Si $U = X$, on pose $V := O$ et la preuve est achevée.
Si $U \neq X$, soit C le complémentaire de U. Par le théorème 1.5, pour tout $c \in C$, il existe V_c un ouvert tel que $K \subset V_c$ et $c \notin \overline{V_c}$. Ainsi si on pose $K_c := C \cap \overline{O} \cap \overline{V_c}$, K_c est compact et l'intersection $\bigcap_{c\in C} K_c$ est vide. Par le théorème 1.8, il existe $c_1, \cdots, c_n$, des points de C, tels que $C \cap \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}} = \emptyset$. On pose alors $V := O \cap V_{c_1} \cap \cdots \cap V_{c_n}$ qui a les propriétés annoncées comme $\overline{V} \subset \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}}$. □

Définition 1.11. Soit X un espace topologique et f une fonction de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).
- f est semi-continue inférieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) > \alpha\}$ est ouvert ;
- f est semi-continue supérieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) < \alpha\}$ est ouvert.

On vérifie alors que

1. une fonction à valeurs réelles est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.
2. Les fonctions indicatrices d'ouverts sont semi-continues inférieurement, celles de fermés semi-continues supérieurement.

3. L'infimum d'une famille de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.
4. Le supremum d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

Exercice 1.12. Montrer que l'opposé d'une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement).
Montrer qu'une somme de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Définition 1.13. Soit $f : X \to \mathbb{C}$. Le support de f, noté supp$f$, est l'adhérence de $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$.

On notera $\mathcal{C}_c(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ continues à support compact. C'est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) pour l'addition usuelle des fonctions (et la multiplication par un scalaire). C'est une algèbre si on la munit du produit des fonctions.

Proposition 1.14. *Soient X et Y des espaces topologiques et $f :\ X \to Y$ continue. Alors si $K \subset X$ est compact, $f(K)$ est compact dans Y.*

Exercice 1.15. Démontrer la proposition 1.14.

Notations. La notation $K \prec f$ désigne un compact K dans X et un fonction f dans $\mathcal{C}_c(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et $f_{|K} = 1$.
La notation $f \prec V$ désigne un ouvert V dans X et un fonction f dans $\mathcal{C}(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et supp $f \subset V$.
On notera $K \prec f \prec V$ quand, à la fois, on a $K \prec f$ et $f \prec V$.

Théorème 1.16. *(Lemme d'Urysohn) Soit X un espace de Hausdorff localement compact, V un ouvert de Xet $K \subset V$ un compact de X. Alors il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K \prec f \prec V$.*

Démonstration. On pose $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. Soit $\{r_i; i \geq 3\} =]0,1[\cap\mathbb{Q}$ (où $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$). Grâce au théorème 1.16, on construit V_0 puis V_1 ouverts relativement compacts tels que

$$K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V. \tag{1.1}$$

Pour $n \geq 2$, supposons que l'on a construit $V_{r_1}, \cdots, V_{r_n}$ ouverts relativement compacts de telle façon que si $r_i < r_j$ alors $\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_i}$. Soit $r_i = \max\{r_k; r_k < r_{n+1},\ 1 \leq k \leq n\}$ et $r_j = \min\{r_k; r_k > r_{n+1},\ 1 \leq k \leq n\}$. Par le théorème 1.16, on construit $V_{r_{n+1}}$ tel que

$$\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_i}.$$

Par récurrence, on construit ainsi une famille d'ouverts relativement compacts $(V_r)_{r\in]0,1[\cap\mathbb{Q}}$ tels que $K \subset V_1$, $\overline{V_0} \subset V$ et

$$s > r \Longrightarrow \overline{V_s} \subset V_r. \tag{1.2}$$

Pour $r \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$ et $x \in X$, posons

$$f_r(x) = r\mathbf{1}_{V_r} = \begin{cases} r \text{ si } x \in V_r, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad g_r(x) = r + (1-r)\mathbf{1}_{\overline{V_r}} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \overline{V_r}, \\ r \text{ sinon} \end{cases}. \tag{1.3}$$

Les remarques qui suivent la définition 1.11 nous disent que pour tout r, f_r est semi-continue inférieurement et g_r semi-continue supérieurement.
On pose alors

$$f = \sup_{r\in]0,1[\cap\mathbb{Q}} f_r \quad \text{et} \quad g = \inf_{r\in]0,1[\cap\mathbb{Q}} g_r. \tag{1.4}$$

Ainsi f est semi-continue inférieurement et g semi-continue supérieurement ; elles prennent clairement leur valeurs dans $[0,1]$. De plus, f est constante égale à 1 sur K et son support est contenu dans $\overline{V_0}$. Pour achever la preuve du lemme d'Urysohn, il suffit de démontrer que $f = g$.
On a $f \leq g$. En effet, on ne peut avoir $f_r(x) > g_s(x)$ que si $r > s$, $x \in V_r$ et $x \notin \overline{V_s}$. Or, $r > s$ implique $V_s \subset V_r$. Ainsi, on voit que pour tout (r,s), on a $f_r \leq g_s$. On en déduit que $f \leq g$.
Supposons maintenant qu'il existe x tel que $f(x) < g(x)$. Il existe donc des rationnels r et s tels que $f(x) < r < s < g(x)$. Comme $f(x) < r$, on a $x \notin V_r$; mais comme $g(x) > s$, on a $x \in \overline{V_s}$ ce qui contredit (1.2). On a donc $f = g$. Ceci achève la preuve du lemme d'Urysohn. □

On va maintenant utiliser le lemme d'Urysohn pour construire une partition continue de l'unité.

Théorème 1.17. *Soient $V_1, \cdots, V_n$ des ouverts de X un espace de Hausdorff localement compact et K un compact tel que $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$, il existe $f_i \prec V_i$ telles que $K \prec f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.*

Démonstration. Par le théorème 1.10, tout point $x \in K$ est contenu dans un ouvert W_x relativement compact d'adhérence contenue dans l'un des $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$. On peut donc recouvrir K par un nombre fini de ces ouverts $K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $F_i = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq m \\ \overline{W_{x_j}} \subset V_i}} \overline{W_{x_j}}$ qui est compact. Le lemme d'Urysohn nous donne alors $g_i \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\mathbf{1}_{F_i} \leq g_i \leq \mathbf{1}_{F_i'}$ où F_i' est un compact de V_i. On pose

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_2 &= (1-g_1)g_2, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n &= (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{n-1})g_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, on a $f_i \in \mathcal{C}_c(X)$ et $0 \leq f_i \leq \mathbf{1}_{F_i'}$. D'autre part,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1 - (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n).$$

Or comme $K \subset F_1 \cup \cdots \cup F_n$, $(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$ s'annule sur K ; ainsi $\mathbf{1}_K \leq f_1 + f_2 + \cdots .f_n$. Ceci complète la preuve du théorème 1.17. □

1.2 Le théorème de représentation de Riesz

On va démontrer le

Théorème 1.18. *(Théorème de représentation de Riesz pour les mesures positives) Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (i.e. pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si $f \geq 0$ alors $\Lambda f \geq 0$). Alors, il existe $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur X contenant les boréliens de X et une unique mesure positive μ sur $\mathcal{S}$ telle que*

1. *pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $\Lambda f = \int_X f(x) d\mu(x)$;*
2. *si $K \subset X$ est compact alors $\mu(K) < +\infty$;*
3. *pour $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$;*
4. *si E est ouvert ou si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ alors $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$;*
5. *si $E \in \mathcal{S}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$ alors $A \in \mathcal{S}$.*

La propriété 1 qui relie la mesure à la forme linéaire est bien sûre celle qui présente le plus grand intérêt. Elle caractérise la mesure μ. On verra plus loin que les propriétés 2, 3 et 4 sont reliées ; dans des espaces "raisonnables", 3 et 4 (en fait une version plus forte au sens où elle est vraie pour tout $E \in \mathcal{S}$) sont des conséquences de 2 (voir les théorèmes 1.33 et 1.34). La propriété 5 dit simplement que la mesure est complète (on sait que l'on peut toujours compléter un mesure).
Un autre théorème de représentation de Riesz bien connu est celui sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui dit que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ est représentée par un vecteur de $\mathcal{H}$ i.e. $\Lambda f = \langle v, f\rangle$ pour un unique $v \in \mathcal{H}$. Dans ce cadre, le fait que Λ est continue est une hypothèse cruciale. À première vue, il n'y a pas d'hypothèse de continuité dans le théorème 1.18. En fait, une forme de continuité découle de la positivité. En effet celle-ci implique que, pour K un compact de X, il existe $C_K > 0$ telle que, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\operatorname{supp} f \subset K$, on a $|\Lambda f| \leq C_K \|f\|_\infty$. D'abord il suffit de démontrer ceci pour f à valeur réelles, le cas général découlant de la linéarité et de la séparation en parties réelle et imaginaire. Ensuite, si on construit $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $g_{|K} = 1$ par le lemme d'Urysohn, alors, pour f à valeurs réelles, les fonctions $g(\|f\|_\infty \pm f)$ sont continues à support compact et positives. Comme Λ est linéaire et positive, on a

$$0 \leq \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda(gf) = \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda f$$

car $gf = f$. Ainsi $|\Lambda f| \leq C_K \|f\|_\infty$ pour $C_K = \Lambda g \geq 0$.

Preuve du théorème de représentation. Commençons par montrer l'unicité. En vertu de 3 et 4, les valeurs de μ sur les compacts la déterminent entièrement. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures vérifiant le théorème 1.18. Soit $K \subset X$ compact et $\varepsilon > 0$. Par 2 et 3, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $K \prec f \prec V$. Ainsi

$$\mu_1(K) \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \mathbf{1}_{K'} d\mu_2 = \mu_2(K') \leq \mu_2(V) \leq \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. En échangeant les rôles de μ_1 et μ_2, on obtient $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout K compact, soit encore, $\mu_1 = \mu_2$ par les remarques faites en début de preuve.
Construction de $\mathcal{S}$ et μ. Pour V ouvert de X, on définit

$$\mu(V) := \sup_{f \prec V} \Lambda f. \tag{1.6}$$

On a clairement que si $V_1 \subset V_2$ ouverts, $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Ainsi, si E est ouvert dans X, on a

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}. \tag{1.7}$$

Pour tout $E \subset X$, on définit $\mu(E)$ par (1.7).

Remarque 1.19. On définit μ sur toutes les parties de X. Pour garantir que μ est σ-additive, on va se restreindre à une σ-algèbre plus petite.

Soit $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des parties E de X telles que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}. \tag{1.8}$$

Soit $\mathcal{S}$ la famille des $E \subset X$ telle que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X.
Montrons que μ et $\mathcal{S}$ ont les propriétés annoncées. Clairement μ est monotone (i.e. si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$) et si $\mu(E) = 0$ alors $E \in \mathcal{S}_F$ et $E \in \mathcal{S}$.
Remarquons que la positivité et la linéarité de Λ entraîne que si f et g dans $\mathcal{C}_c(X)$ vérifie $f \leq g$ alors $\Lambda f \leq \Lambda g$.

Lemme 1.20. *Soient $(E_i)_{i\geq 1}$ des parties de X. Alors* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$.

Démonstration. Si $\mu(E_i) = +\infty$ pour l'un des i, alors la conclusion du lemme 1.20 est trivialement vraie. On les supposera donc tous les $(\mu(E_i)_{i\geq 1}$ finis.
Montrons d'abord que $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si E_1 et E_2 sont ouverts. Choisissons g telle que $g \prec E_1 \cup E_2$. Alors par le théorème 1.17, pour $i \in \{1, 2\}$, on construit $f_i \prec E_i$ et telles que $f_1 + f_2 = 1$ sur le support de g. Ainsi $g = gf_1 + gf_2$ et

$$\Lambda g = \Lambda(gf_1) + \Lambda(gf_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

En prenant le supremum de cette inégalité sur l'ensemble des $g \prec E_1 \cup E_2$, par (1.6), on obtient $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par (1.7), pour tout $i \geq 1$, il existe V_i ouvert contenant E_i tel que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Soit $V = \bigcup_{i\geq 1} V_i$. Choisissons $f \prec V$. Comme f est de support compact, il existe $n \geq 1$ tel que $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$.
En appliquant l'inégalité pour deux ouverts, on calcule

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \prec V$ et comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset V$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci achève la preuve du lemme 1.20. □

Lemme 1.21. *Si K est compact alors $K \in \mathcal{S}_F$ et* $\mu(K) = \inf_{K\prec f} \Lambda f$.

Le point 2 du théorème 1.18 est une conséquence immédiate de ce lemme.

Démonstration. Pour $K \prec f$ et $0 < \alpha < 1$, on définit l'ouvert $V_\alpha := \{x \in X; f(x) > \alpha\}$. Ainsi, $K \subset V_\alpha$ et $\alpha\, g \leq f$ si $g \prec V_\alpha$. Donc,

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup_{g\prec V_\alpha} \Lambda g \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f.$$

En laissant tendre α vers 1^-, on obtient

$$\mu(K) \leq \Lambda f \text{ si } K \prec f. \tag{1.9}$$

Ainsi $\mu(K) < +\infty$. Comme (1.8) est clairement vraie pour $E = K$, on voit que $K \in \mathcal{S}_F$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset K$ tel que $\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 1.16), on construit f telle que $K \prec f \prec V$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. En laissant ε tendre vers 0^+, on obtient $\inf_{K\prec f} \Lambda f \leq \mu(K)$ ce qui complète la preuve du lemme 1.21. □

Lemme 1.22. *$\mathcal{S}_F$ contient tous les ouverts sur lesquels μ est finie (i.e. on a (1.8) pour tout E ouvert tel que $\mu(E) < +\infty$).*

Démonstration. Soit E ouvert et $\alpha < \mu(E)$. Alors il existe $f \prec E$ tel que $\alpha < \Lambda f$. Pour tout U ouvert contenant K, le support de f, on a $f \prec U$ donc $\Lambda f \leq \mu(U)$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(K)$. On trouve ainsi un compact $K \subset E$ tel que $\alpha < \mu(K)$. Ceci nous donne (1.8). □

Lemme 1.23. *Supposons que* $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ *où pour tout* $i \geq 1$, $E_i \in \mathcal{S}_F$ *et pour tout* $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. *Alors*

$$\mu(E) = \sum_{i \geq 1} \mu(E_i). \tag{1.10}$$

Si, de plus, $\mu(E) < +\infty$, *alors* $E \in \mathcal{S}_F$.

Démonstration. Montrons d'abord que si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{1.11}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $f_{|K_1} = 1$, $f_{|K_2} = 0$ et $0 \leq f \leq 1$. Par le lemme 1.21, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_1 \cup K_2 \prec g$ et $\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. On remarque que $K_1 \prec fg$ et $K_2 \prec (1-f)g$. Comme Λ est linéaire, de (1.9), on tire

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1-f)g) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a démontré (1.11).
Si $\mu(E) = +\infty$ alors l'égalité souhaitée découle du lemme 1.20. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $\mu(E) < +\infty$ donc $E_i \in \mathcal{S}_F$ pour tout i. Pour tout i, il existe donc $H_i \subset E_i$ compact tel que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{1.12}$$

Posant $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$, de (1.11), on tire

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon. \tag{1.13}$$

Ceci étant vrai pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, en se souvenant du lemme 1.20, on obtient (1.10).
Montrons enfin que E vérifie (1.8) (et donc que $E \in \mathcal{S}_F$) si $\mu(E) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, par (1.10), il existe $N > 0$ tel que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon. \tag{1.14}$$

Donc, par (1.13), on a $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$ ce qui prouve que E vérifie (1.8). Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.24. *Si* $E \in \mathcal{S}_F$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe* K *compact et* V *ouvert tel que* $K \subset E \subset V$ *et* $\mu(V \setminus K) \leq \varepsilon$.

Démonstration. D'après nos définitions, on sait qu'il existe $K \subset E$ et $V \supset E$ tels que $\mu(V) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \varepsilon/2$. Comme $V \setminus K$ est ouvert, il est dans $\mathcal{S}_F$ par le lemme 1.22. Alors le lemme 1.23 nous dit que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

Ceci démontre le lemme 1.24. □

Lemme 1.25. *Si* $(A_1, A_2) \in \mathcal{S}_F \times \mathcal{S}_F$ *alors* $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cup A_2$ *et* $A_1 \cap A_2$ *sont dans* $\mathcal{S}_F$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; par le lemme 1.24, il existe $(K_i)_{i\in\{1,2\}}$ compacts et $(V_i)_{i\in\{1,2\}}$ ouverts tel que $K_i \subset A_i \subset V_i$ et $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$ pour $i \in \{1, 2\}$. Comme

$$A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2) \cup (K_1 \setminus V_2),$$

le lemme 1.20 montre que

$$\mu(A_1 \setminus A_2) \leq 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

Or $K_1 \setminus V_2$ est un compact de $A_1 \setminus A_2$, ceci prouve de $A_1 \setminus A_2$ satisfait (1.8) et, ainsi, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{S}_F$.
Comme $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, on applique le lemme 1.23 pour obtenir que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}_F$. Enfin, comme $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$, on a aussi que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.26. *$\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les boréliens de X.*

Démonstration. Dans toute la preuve, K est un compact de X. Si $A \in \mathcal{S}$ alors $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$; $A^c \cap K$ est donc élément de $\mathcal{S}_F$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{S}_F$. Ainsi $A^c \in \mathcal{S}$.
Supposons que $A = \bigcup_{i\geq 0} A_i$ où $A_i \in \mathcal{S}$. Posons $B_1 = A_1 \cap K$ et

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Alors, par le lemme 1.25, les $(B_i)_{i\geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_F$ deux à deux disjoints et $A \cap K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. Ainsi $A \cap K \in \mathcal{S}_F$ par le lemme 1.24 et $A \in \mathcal{S}$.
Enfin, si F est fermé dans X alors $F \cap K$ est compact donc élément de $\mathcal{S}_F$. Donc $F \in \mathcal{S}$. En particulier $X \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les fermés de X ; elle contient donc la σ-algèbre engendrée par ces fermés c'est-à-dire la σ-algèbre des boréliens de X. Ceci achève la preuve du lemme 1.26. □

Lemme 1.27. *$\mathcal{S}_F$ est l'ensemble des éléments E de $\mathcal{S}$ tels que $\mu(E) < +\infty$.*

Ceci nous donne le point 4 du théorème 1.18.

Démonstration. Si $E \in \mathcal{S}_F$, alors les lemmes 1.21 et 1.25 montrent que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X. Ainsi $E \in \mathcal{S}$.
Réciproquement, si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ et si $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset E$ ouvert tel que $\mu(V) < +\infty$; Par les lemmes 1.22 et 1.23, il existe $K \subset V$ compact tel que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{S}_F$, il existe $H \subset E \cap K$ compact tel que

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon.$$

De l'inclusion $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, on tire

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) \leq \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Comme conséquence des lemmes 1.21, 1.23 et 1.26, on obtient le

Lemme 1.28. *μ définit une mesure sur $\mathcal{S}$.*

Enfin, pour achever la démonstration du théorème de représentation de Riesz, il nous suffit de démontrer le

Lemme 1.29. *Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on a $\Lambda f = \int_X f d\mu$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité pour f à valeurs réelles (par linéarité des deux membres de l'égalité). En fait, en échangeant f avec $-f$, on voit qu'il suffit de démontrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, l'inégalité

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu. \tag{1.15}$$

Soit K le support de $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant l'image de f (qui est compacte car $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b. \tag{1.16}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, posons

$$E_i = \{x;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K. \tag{1.17}$$

Étant continue, f est Borel mesurable ; les ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont donc des boréliens disjoints dont la réunion vaut K. Pour $1 \leq i \leq n$, on peut trouver $V_i \supset E_i$ ouverts tels que $f_{|V_i} \leq y_i + \varepsilon$ et

$$\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1.18}$$

Par le théorème 1.17, on construit, pour $1 \leq i \leq n$, $h_i \prec V_i$ telles que $h_1 + \cdots + h_n = 1$ sur K. Ainsi $f = h_1 f + \cdots + h_n f$ et le lemme 1.21 nous dit que

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i.$$

Comme $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ et $y_i - \varepsilon \leq f$ sur E_i, on calcule

$$\begin{aligned}
\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) &\leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\leq \int_X f\, d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve de (1.15) est complète. □

Ceci achève la preuve du théorème 1.18. □

1.3 Mesures de Borel positives

Définition 1.30.

1. Une mesure μ définie sur la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace de Hausdorff localement compact, disons, X est appelée une *mesure borélienne* sur X.
2. On dit qu'elle est intérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.
3. On dit qu'elle est extérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
4. On dit qu'elle est régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.