Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

24 janvier 2019

La mesure construite dans le Théorème 1.18 n'est pas forcément régulière dans le sens défini ci-dessus : elle est extérieurement régulière mais la régularité intérieure n'est vraie que sur des ensembles spéciaux. Cela ne peut être amélioré sans hypothèse supplémentaire (voir [6, Chapitre 2, exercice 17]). On va maintenant voir qu'avec un un léger renforcement des hypothèses, ce problème disparaît.

Définition 1.31.

1. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit σ-compact s'il est la réunion dénombrable de compacts.
2. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés.
3. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé G_δ s'il est intersection dénombrable d'ouverts.
4. Un sous-ensemble E d'un espace mesuré (X, μ) est dit σ-fini s'il est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

Exercice 1.32. Montrer qu'un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme est σ-compact.

Théorème 1.33. *Supposons que X est un espace de Hausdorff localement compact, σ-compact. Supposons que $\mathcal{S}$ et μ sont respectivement une σ-algèbre sur X et une mesure positive sur cette σ-algèbre satisfaisant aux propriétés (2)-(5) du Théorème 1.18.*
Alors $\mathcal{S}$ et μ vérifient

1. *pour tout $E \in \mathcal{S}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F, fermé de X, et V, ouvert de X, tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$;*
2. *la mesure μ est une mesure de Borel régulière ;*
3. *si $E \in \mathcal{S}$, il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Démonstration. On sait que $X = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots$ où $(K_i)_{i \geq 1}$ sont des compacts. Si $E \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ alors, pour $n \geq 1$, $\mu(K_n \cap E) < +\infty$ et il existe V_n ouvert tel que $V_n \supset K_n \cap E$ et

$$\mu(V_n \setminus (K_n \cap E)) \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Si $V = \bigcup_{n \geq 1} V_n$ alors $V \setminus E \subset \bigcup_{n \geq 1} (V_n \setminus (K_n \cap E))$ ainsi

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon/2. \tag{1.19}$$

De même pour E^c, on peut trouver un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. On pose alors $F = W^c$. On a $F \subset E$ et $E \setminus F = W \setminus E^c$. Ceci démontre le point 1.
Tout fermé de X est lui aussi σ-compact (car l'intersection d'un fermé et d'un compact est compact dans un espace de Hausdorff). Ainsi le point 1 implique la régularité intérieure de μ (la régularité extérieure ayant été supposée vraie) ; on a donc démontré le point 2.
Pour $j \geq 1$, on peut choisir $\varepsilon = 1/j$ dans (1.19) ; on obtient ainsi, pour $j \leq 1$, F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$. Posons $A = \cup_j F_j$ et $B = \cap_j V_j$. Alors A est un F_σ, B un G_δ et $\mu(B \setminus A) = 0$ car $\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$ ceci pour tout $j \geq 1$. Ceci démontre le point 3 et achève la preuve du théorème 1.33. □

On va utiliser ce résultat pour obtenir le

Théorème 1.34. *Soit un espace de Hausdorff localement compact dans lequel tout ouvert est σ-compact. Sur cet espace, toute mesure borélienne positive vérifiant que tout compact est de mesure finie est régulière.*

Exercice 1.35. Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme. Montrer que tout ouvert de X est σ-compact.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on peut définir $\Lambda f := \int_X f(x) d\mu(x)$. Comme $\mu(K)$ est finie pour K compact, l'intégrale est bien convergente et on a $|\Lambda f| \leq \mu(\operatorname{supp} f) \, \|f\|_\infty$. Par linéarité de l'intégrale, Λ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$; comme μ est positive, Λ est positive. Par le théorème 1.18, on peut lui associer une mesure borélienne λ qui vérifie alors

$$\int_X f d\lambda = \Lambda f = \int_X f d\mu. \tag{1.20}$$

Pour démontrer le théorème 1.34, il suffit de montrer que λ et μ coïncident.
Soit V un ouvert de X. Alors par hypothèse, il existe $(K_j)_{j \geq 1}$ des compacts de X tels que $V = \cup K_j$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 1.16), pour $j \geq 1$, on peut trouver $f_j \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_j \prec f_j \prec V$.Soit $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$. On a $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ et $g_n(x) \nearrow \mathbf{1}_V(x)$ en tout point $x \in X$. Ainsi (1.20) et le théorème de convergence monotone impliquent

$$\lambda(V) = \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V). \tag{1.21}$$

Soit E un borélien de X et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème 1.33 à μ, on construit F fermé et V ouvert tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. Ainsi $\mu(V) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(E) + \varepsilon$.
Or $V \setminus F$ est ouvert ; donc, par (1.21), on a $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$ c'est-à-dire $\lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$$

ainsi $|\lambda(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(E) = \mu(E)$. Ceci prouve le théorème 1.34. □

1.3.1 La mesure de Lebesgue

Nous allons maintenant construire la mesure de Lebesgue qui est un cas particulier des mesures positives construites dans le chapitre précédent.

Définition 1.36.

1. On appelle *boîte* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \cdots \times[a_d, b_d[$ (où $a_i \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq d$).
2. Le point $(a_1, \cdots, a_d)$ est appelé le *coin* de la boîte.
3. Le *volume* de la boîte $B := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \cdots \times [a_d, b_d[$ est le réel positif ou nul $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot (b_d - a_d)$; il est noté $\mathrm{Vol}(B)$.

On construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par le

Théorème 1.37. *Il existe une unique mesure complète λ_d définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda_d(B) =$ Vol(B) pour toute boîte B ;*
2. *la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient tous les boréliens ; plus précisément, $E \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$; de plus, λ_d est régulière ;*
3. *λ_d est invariante par translation i.e. si $E \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $x + E \in \mathcal{S}$ et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.*

De plus, λ_d vérifie

4. *si μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$ finie sur tout compact qui plus est invariante par translation, alors il existe $c \geq 0$ telle que $\mu = c \cdot \lambda_d$;*

5. *pour* $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *une application linéaire, pour tout* $E \in \mathcal{S}$*, on a* $T(E) \in \mathcal{S}$ *et* $\lambda(T(E)) = |det(T)|\,\lambda(E)$ *(où* $det(T)$ *désigne le déterminant de l'application linéaire* T*).*

Démonstration. Commençons par consttruire un analogue multidimensionnel des sommes de Riemann. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ i.e. $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont toutes des multiples entiers relatifs de 2^{-n}. Soit Ω_n la famille des 2^{-n}-boites dont les coins se trouvent en un point de $\mathcal{P}_n$. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes de Ω_n :

1. pour n fixé, chaque point de $\mathbb{R}^d$ appartient à exactement une boîte de Ω_n ;
2. si $B \in \Omega_n$ et $B' \in \Omega_r$ et $r < n$ alors soit $B \subset B'$ soit $B \cap B' = \emptyset$;
3. si $B \in \Omega_r$ alors $\mathrm{vol}(B) = 2^{-rd}$ et si de plus $n > r$, B contient exactement $2^{(n-r)d}$ points de $\mathcal{P}_n$.

De plus les familles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ vérifient

Lemme 1.38. *Tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}^d$ *est une union disjointe dénombrable de boîtes dans* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots$.

Démonstration. Soit V un ouvert. Clairement V est la réunion des boîtes contenues dans V et appartenant à l'un des Ω_n. De ces boîtes, on peut séparer celles appartenant à Ω_1 de celles appartenant à $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$; par la propriété 2, on peut choisir ces dernières boîtes de façon qu'elle ne rencontrent aucune des boîtes dans Ω_1. Puis, on considère les boîtes appartenant à Ω_2 que l'on sépare de celles appartenant à $\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \cdots$; on peut encore appliquer la propriété 2 à ces dernières boites. En continuant cette procédure on obtient la décomposition souhaitée pour l'ouvert V. □

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\Lambda_n f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} f(x). \tag{1.22}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des coins des cubes dans Ω_n. Comme f est à support compact, la somme dans (1.22) ne contient qu'un nombre fini de termes. Λ_n est linéaire et positive.

Montrons que $\Lambda_n f$ converge vers, disons, Λf qui sera donc linéaire et positive. On peut sans perte de généralité supposer que f est à valeurs réelles. Pour $x \in \mathcal{P}_n$, soit B_x^n l'unique boîte de Ω_n dont le coin est x. On définit

$$\Lambda_n^+ f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \sup_{y\in B_x^n} f(y) \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \inf_{y\in B_x^n} f(y).$$

Comme f est à support compact, ces sommes sont finies. Clairement, par la propriété 2 des boîtes de Ω_n, on a

$$\Lambda_n^- f \leq \Lambda_{n+1}^- f \quad \text{et} \quad \Lambda_{n+1}^+ f \leq \Lambda_n^+ f \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n^+ f$$

Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si $n \geq N$

$$\forall C \in \Omega_n, \quad 0 \leq \sup_C f - \inf_C f \leq \varepsilon$$

Si f est à support dans $[-k,k[^d$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on estime donc, pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n^+ f - \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{\substack{C\in\Omega_n \\ C\cap[-k,k[^d\neq\emptyset}} (\sup_C f - \inf_C f) \leq 2^{-nd}(2k)^d 2^{nd}\varepsilon = (2k)^d\varepsilon.$$

Les suites $(\Lambda_n^- f)_n$ et $(\Lambda_n^+ f)_n$ sont donc adjacentes. Ainsi la suite $(\Lambda_n f)_n$ converge vers une limite que l'on note Λf. Celle-ci est bien sûr linéaire et positive.

Remarque 1.39. La somme $\Lambda_n f$ est une somme de Riemann pour f. Nous venons donc juste de construire l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème 1.18 nous donne alors une σ-algèbre $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}$, une mesure λ_d représentant Λ. Vérifions qu'elle a les propriétés annoncées dans le théorème 1.37. Cette mesure est complète et le théorème 1.34 nous donne le point 2 du théorème 1.37.
Montrons 1. Soit B une boîte et E_n la réunion des boîtes de Ω_n dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de B. Soit f_n telle que $\overline{E_n} \prec f_n \prec \overset{\circ}{B}$. On pose $g_n = max(f_1, \cdots, f_n)$. On a alors que $g_n \nearrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{B}}$ ponctuellement quand $n \to +\infty$. Par la définition de Λ, on a

$$\mathrm{vol}(E_n) \leq \Lambda f_n \leq \Lambda g_n \leq \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(\overset{\circ}{B}).$$

Quand $n \to +\infty$, $\mathrm{vol}(E_n) \to \mathrm{vol}(B)$ et $\Lambda g_n = \displaystyle\int_X g_n d\lambda_d \nearrow \lambda_d(\overset{\circ}{B})$ par convergence croissante. Ainsi $\lambda_d(\overset{\circ}{B}) = \mathrm{vol}(B)$. Donc $\lambda_d(B) \geq \lambda_d(\overset{\circ}{B}) = \mathrm{vol}(B)$. De plus, pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(\overset{\circ}{B} +]-\varepsilon, \varepsilon[^d) = \lambda_d(\overline{\overset{\circ}{B +]-\varepsilon, \varepsilon[^d}}) = \mathrm{vol}(\overline{\overset{\circ}{B +]-\varepsilon, \varepsilon[^d}}) = \mathrm{vol}(B) + O(\varepsilon). \tag{1.23}$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient le point 1.
Pour prouver 3, 4 et 5, on observe que, si λ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boite E alors cette égalité reste vraie pour tout E ouvert de $\mathbb{R}^d$ (par le lemme 1.38) et, donc, pour tout E borélien comme λ et λ_d sont régulières (par le théorème 1.34).
Pour montrer 3, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\lambda_x(E) := \lambda_d(E + x)$ pour E borélien. Clairement, λ_x est une mesure borélienne positive. Par le point 1, $\lambda_x(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte, donc, pour tout borélien E, on a $\lambda_d(E) = \lambda_d(E + x)$. Enfin, par le point 2, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{S}$.
Supposons que λ vérifie les hypothèses de 4. Pour $n \geq 1$, $[0,1[^d$ se partitionne de la façon suivante $[0,1[^d = \displaystyle\bigcup_{x \in \mathcal{P}_n \cap [0,1[^d} x + [0, 2^{-n}[^d$ où la réunion est disjointe. On en déduit que

$$2^{nd}\lambda([0, 2^{-n}[^d) = \lambda([0,1[^d) = c\,\lambda_d([0,1[^d) = c2^{nd}\lambda_d([0, 2^{-n}[^d)$$

où $c := \lambda([0,1[^d)$. Donc, par invariance par translation, pour tout $Q \in \Omega_n$, $\lambda(Q) = c\,\lambda_d(Q)$. Le lemme 1.38 et la σ-additivité impliquent alors que pour tout ouvert E de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(E) = c\,\lambda_d(E)$. Ceci prouve 4.
Démontrons 5. Commençons par le démontrer pour $T = U$ où U est une isométrie i.e. $U\,{}^tU = {}^t\,U\,U = 1$. L'application $E \mapsto \lambda_d(U(E))$ définit une mesure borélienne qui satisfait à toutes les conditions du point 4. Il existe donc une constante $c(U)$ telle que $\lambda_d(U(E)) = c(U)\lambda_d(E)$. Pour $E = B_2(0,1)$ la boule euclidienne centrée en 0 de rayon 1, on a bien sûr $U(E) = E$. Ainsi $c(U) = 1$.
Soit maintenant T linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Si T n'est pas bijective, alors l'image de T est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une isométrie U telle que $E := U(\mathrm{Im}\,T) \subset \{x = x(_1, \cdots, x_d);\ x_1 = 0\}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{n \geq 1} P_{n,\varepsilon} \quad \text{où} \quad P_{n,\varepsilon} = [-\varepsilon 2^{-d(n+1)}, \varepsilon 2^{-d(n+1)}[\times [-2^n, 2^n[^{d-1}$$

Ainsi $\mathrm{Im}\,T \subset A_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{n \geq 1} {}^tU(P_{n,\varepsilon})$. Clairement $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$. De plus, par ce qui vient d'être montré pour les isométries, on a

$$\lambda_d(A_\varepsilon) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_d(P_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon \sum_{n \geq 1} 2^{-d(n+1)+d+n(d-1)} = \varepsilon.$$

Donc $\operatorname{Im} T$ est contenue dans $\cap_{n\geq 1} A_{1/n}$ qui est de mesure nulle. Comme λ_d est complète, $\operatorname{Im} T$ est mesurable et $\lambda_d(\operatorname{Im} T) = 0$. On obtient donc 5 quand $\det(T) = 0$.
Supposons maintenant que $\det(T) \neq 0$. Par le raisonnement fait pour une isométrie, on sait que $\lambda_d(T(E)) = c(T)\lambda_d(E)$ pour tout borélien. On en déduit que si T et T' inversible alors $c(TT') = c(T)c(T')$. D'autre part, T peut se décomposer en un produit de matrices $T = T_1 T_2 \cdots T_m$ où chacune des matrices T_i est de l'une des trois types suivants (ici $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$) :

1. $\{Te_1, Te_2, \cdots, Te_d\}$ est une permutation de $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$; dans ce cas, si $C = [0,1[^d$, on voit que $T(C) = C$ et donc $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$;
2. $Te_1 = \alpha e_1$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = [0, \alpha[\times[0,1[^{d-1}$ si $\alpha > 0$ et $T(C) =]\alpha, 0] \times [0,1[^{d-1}$ si $\alpha < 0$; ainsi $c(T) = |\alpha|$; clairement, on a $\det T = \alpha$; donc $c(T) = |\det T|$;
3. $Te_1 = e_1 + e_2$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = \{(x_1, x_2);\ x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1,\ x_1 \in [0,1[\} \times [0,1[^{d-2}\}$ donc $T = T_1 \cup T_2$ où $T_1 = T \cap \{x_2 < 1\}$ et $T_2 = T \cap \{x_2 \geq 1\}$; on a $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et si on pose $S_2 = T_2 - e_2$, on a $T_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $T_1 \cup S_2 = C$; donc $\lambda_d(T(C)) = \lambda_d(C)$ c'est-à-dire $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$.

Comme $T = T_1 T_2 \cdots T_m$, on calcule

$$c(T) = c(T_1)\, c(T_2) \cdots c(T_m) = |\det T_1|\, |\det T_2| \cdot |\det T_m| = |\det T|.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.37. □

1.3.2 Continuité et mesurabilité

Si la topologie et la σ-algèbre auxquelles réfèrent les deux termes du titre de la section ne sont pas reliées, il n'y a bien sûr pas lieu d'espérer une relation entre ces notions.
Sur un espace de Hausdorff localement compact, il en va tout autrement si la mesure μ et $\mathcal{S}$, la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.18. Nous nous placerons désormais, et pour toute cette section, dans ce cadre.

Théorème 1.40. *(Théorème de Lusin) Soient $f :\ X \to \mathbb{C}$ mesurable et $A \in \mathcal{S}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.24}$$

On peut de plus choisir g de façon que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \tag{1.25}$$

Démonstration. Soit $f \geq 0$ mesurable positive. On construit une suite croissante de fonctions mesurables simples (i.e. de la forme $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$), disons, $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n \to f$ simplement sur X. Pour cela, pour $n \geq 1$, on définit

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}k_n \text{ où } k_n \text{ est l'unique entier tel que } 2^{-n}k_n \leq t < 2^{-n}(k_n+1) \text{ quand } t \in [0, n[, \\ 0 \text{ quand } t \geq n. \end{cases}$$

On vérifie que chaque fonction $\varphi_n :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est borélienne, que

$$0 \leq \inf_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq \sup_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq 2^{-n} \tag{1.26}$$

et si $n \geq m$, on a $\varphi_m \leq \varphi_n$. On pose alors $s_n = \varphi_n \circ f$; la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ satisfait aux conditions requises.

Remarque 1.41. Notons que (1.26) montre que si f est bornée alors la convergence de $(s_n)_n$ vers f est uniforme.

Pour démontrer le théorème, commençons par supposer que $0 \leq f \leq 1$. On pose alors $t_1 = s_1$ et $t_n = s_n - s_{n-1}$ si $n \geq 2$. Par construction des $(s_n)_n$, $2^n t_n$ est l'indicatrice d'un ensemble T_n et

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} t_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.27}$$

Supposons de plus que A est compact. Soit $\varepsilon > 0$ et V un ouvert relativement compact contenant A. Par le théorème 1.16, on peut trouver des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $n \geq 1$, $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, pour $n \geq 1$, on construit une fonction g_n telle que $K_n \prec g_n \prec V_n$. Posons

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} g_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.28}$$

La série converge uniformément sur X et définit donc une fonction continue dont le support est compact (car contenu dans $\overline{V}$). Comme $2^{-n}g_n(x) = t_n(x)$ pour $x \notin (V_n \setminus K_n)$, par (1.27) et (1.28) on sait que f et g coïncide sauf au plus sur $\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)$. Or on a $\mu(\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon$. On a ainsi démontré le théorème 1.40 si f est à valeurs dans $[0,1]$ et A compact.
Supposons maintenant que A est compact et que f est bornée. On se ramène au cas où f est à valeurs réelles en passant aux parties réelle et imaginaire de f. Pour f à valeurs réelles, bornée à support compact, soit M son supremum supposé non nul. Prenons $A \prec g$. Alors on applique le résultat déjà démontré à $\tilde{f} := (f + M\,g)/2M$ pour obtenir celui annoncé pour f.
Si f est bornée mais que A vérifie seulement $\mu(A) < +\infty$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon/2$. Puis, on applique le résultat déjà obtenu pour f et K. Ceci démontre donc le premier énoncé du théorème 1.40 quand f est bornée.
Pour obtenir le second énoncé dans ce cas, il suffit de modifier g de la façon suivante. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = z$ si $|z| \leq R := \sup_{x\in X} |f(x)|$ et $\varphi(z) = R\,z\,|z|^{-1}$ si $|z| \geq R$. Alors φ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans le disque centré en 0 de rayon R. Si g satisfait (1.24) alors $g_1 = \varphi \circ g$ satisfait (1.24) et (1.25).
Enfin, si f n'est pas bornée, on a $\cap_{n\geq 1}\{x;\ |f(x)| > n\} = \emptyset$. Donc, comme $\mu(\{x;\ |f(x)| > 0\}) \leq \mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$ par convergence croissante. On peut alors appliquer le résultat déjà démontré à $f \cdot \mathbf{1}_{\{x;\ |f(x)| \leq n\}}$ (qui est bornée) pour n suffisamment grand pour que $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) < \varepsilon/2$ et conclure.
Ceci achève la preuve du théorème 1.40. $\square$

Corollaire 1.42. *Sous les hypothèse du théorème 1.40, si* $\sup_{x\in X} |f(x)| \leq 1$ *alors il existe une suite* $(g_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathcal{C}_c(X)$ *tels que, pour* $n \geq 1$, $\sup_{x\in X} |g_n(x)| \leq 1$ *et, pour* μ*-presque tout* x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.

Démonstration. Par le théorème de Lusin, pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|g_n(x)| \leq 1$ sur X et tel que $\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) < +\infty$, on a

$$\mu(\{x; \#\{n; f(x) \neq g_n(x)\} = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} \{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}\right) = 0.$$

Ainsi, pour presque tout x, à partir d'un certain rang, la suite $(g_n(x))_n$ est constante et égale à $f(x)$. Ceci achève la preuve du corollaire. $\square$

Théorème 1.43. *(Théorème de Vitali-Carathéodory) Soit $f \in L^1(\mu)$, f à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux fonctions u et v telles que $u \leq f \leq v$, u est semi-continue supérieurement, v est semi-continue inférieurement et*

$$\int_X (v-u)d\mu < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \geq 0$. En reprenant la construction des suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ faite au début de la preuve du théorème 1.40 (voir en particulier, (1.27)), on voit que

$$f = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{E_n} \tag{1.30}$$

où $(E_n)_n$ sont des boréliens et les $(c_n)_n$ sont strictement positifs.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} c_n \mu(E_n) \tag{1.31}$$

ainsi comme f est intégrable, la série du membre de droite de (1.31) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 1.16, on construit des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $i \geq 1$, $K_n \subset E_n \subset V_n$ et

$$c_n \mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{1.32}$$

Choisissons N tel que

$$\sum_{i\geq N+1} c_n \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.33}$$

et posons

$$v = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{1}_{K_n}. \tag{1.34}$$

Alors, par les remarques suivant la définition 1.11, u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement. La définition des $(K_n)_n$ et $(V_n)_n$ et (1.30) impliquent que $u \leq f \leq v$. Enfin, on calcule

$$v - u = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{1}_{V_n} - \mathbf{1}_{K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \leq \sum_{n\geq 1} c_n(\mathbf{1}_{V_n \setminus K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{E_n}. \tag{1.35}$$

Ainsi (1.32) et (1.33) impliquent (1.29).
Dans le cas général, on décompose $f = f^+ - f^-$ où $(f^{\pm})$ sont positives mesurables. On construit $u^{\pm}$ et $v^{\pm}$ comme ci-dessus pour $f^{\pm}$ et on pose $u = u^+ - v^-$ et $v = v^+ - u^-$. En se souvenant de l'exercice 1.12, on voit que u et v on les propriétés requises. Ceci prouve le théorème 1.43. □

Exercice 1.44. Montrer qu'on ne peut pas en général prendre u et v continues.

1.4 Espaces L^p.

Dans toute cette section [1], $(X, \mathcal{S}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque. Lorsque des hypothèses supplémentaires seront nécessaires, elles seront précisées.

1. Cette section est tirée du polycopié [1] et reproduite ici avec l'aimable autorisation de son auteur.

1.4.1 Inégalités de Hölder

Proposition 1.45 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in]0, 1[$. Alors on a*

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t.$$

De plus, si $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Remarque 1.46. Vous noterez que l'inégalité est bien homogène en f et g.

Remarque 1.47. Pour une fonction positive f et $r > 0$ on a

$$\int f^r \, d\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{x \in X \; ; \; f(x) \neq 0\}) \neq 0,$$

ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{S}$, avec $\mu(A) \neq 0$ tel que $f > 0$ sur A. On écrit aussi "$f \not\equiv 0$ μ-pp" qu'il faut comprendre comme "f n'est pas égale à une fonction nulle μ-pp".

Démonstration. D'abord, on remarque que l'inégalité devient une égalité lorsque $f = g$.
Si $\int f \, d\mu = +\infty$, il n'y a rien à montrer. De même, si $\int f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-pp et l'inégalité est triviale. Idem avec g. On supposera donc que $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$.
On va utiliser deux fois le Lemme 4.2. Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$ on a

$$f(x)^{1-t} g(x)^t \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda^{-\frac{1}{t}} g(x)$$

et donc en intégrant on trouve que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} \int f \, d\mu + t \lambda^{-\frac{1}{t}} \int g \, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur les λ, ou trouve donc bien $\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t$.
Pour la réciproque, on suppose donc que les intégrales sont non-nulles et finies. On reprend la démonstration ci-dessous mais au lieu de prendre l'infimum sur les λ, on suppose qu'on a pris, dès le début le $\lambda = \lambda_0 > 0$ optimal pour lequel l'infimum est atteint (la valeur valeur exacte, dont on n'a pas besoin, est $\lambda_0 = \Big(\frac{\int g \, d\mu}{\int f \, d\mu} \Big)^{t(1-t)} > 0$). Alors on a

$$\Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t - \int f^{1-t} g^t \, d\mu = \int \Big[(1-t) \lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g(x)^t - f(x)^{1-t} g(x)^t \Big] \, d\mu.$$

Le terme sous l'intégrale est positif, et donc pour que son intégrale soit nulle, il faut qu'il soit nul μ-pp. Mais par l'étude des cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, cela implique que $\lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f = \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g$ μ-pp. □

Il y a beaucoup de formulations équivalentes de l'inégalité de Hölder. En voici une pour ceux qui préfèrent les p, q. On rappelle que $p/q = p - 1$.

Proposition 1.48 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives sur X. Alors,*

$$\int fg \, d\mu \leq \Big(\int f^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int g^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

avec égalité lorsque $g = f^{p-1}$. De plus, lorsque $0 < \int f^p \, d\mu, \int g^q \, d\mu < +\infty$ il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g^q = \lambda f^p$ (i.e. $g = \tilde{\lambda} \, f^{p-1}$ pour un $\tilde{\lambda} \geq 0$).

Démonstration. On applique la proposition précédente en remplaçant $(1-t)$ par $\frac{1}{p}$, et donc t par $\frac{1}{q}$, et en l'appliquant à f^p à la place de f et g^q à la place de g. $\square$

Le cas le plus rencontré est le cas $p = q = 2$, et l'inégalité s'appelle alors *inégalité de Cauchy-Schwartz*.

Remarque 1.49. Le cas du couple $p = 1$ et $q = \infty$ est trivial et s'énonce comme suit : si f, g sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors

$$\int fg\,d\mu \leq \big(\sup g\big)\int f\,d\mu.$$

Remarque 1.50. Une conséquence de l'inégalité de Hölder est que si on se donne p et q dans $]1,+\infty[$ avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ et $f : X \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive avec $\int f^p\,d\mu < +\infty$, alors

$$\Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \sup_{g\geq 0}\frac{\displaystyle\int fg\,d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\,d\mu\Big)^{1/q}} = \sup_{g\geq 0,\,\int g^q\,d\mu\leq 1}\int fg\,d\mu.$$

où les sup sont pris sur les fonction mesurables positives telles que $0 < \int g^q\,d\mu < +\infty$). De plus ce sup est atteint. En effet, l'inégalité de Hölder montre que $\dfrac{\displaystyle\int fg\,d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\,d\mu\Big)^{1/q}} \leq \Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p}$, et donc *idem* pour le sup sur g. On voit par ailleurs qu'il y a égalité si $g = f^{p-1}$ par exemple (si f est non nulle ; si f est nulle μ-pp, on prend n'importe que g), ce qui donne à la fois l'égalité voulue, et le fait que le sup est atteint. La deuxième inégalité découle par homogénéité.
On retrouvera une formule similaire lors de l'étude de la dualité $L^p - L^q$.

1.4.2 Inégalité de Minkowski

Proposition 1.51. *Soit $p \in]1,+\infty[$. Si $f, g : X \to [0,+\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors*

$$\Big(\int (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int g^p\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

Si $0 < \int f^p\,d\mu, \int g^p\,d\mu < +\infty$, alors il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Démonstration. Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. On rappelle que $q(p-1) = p$. Si f ou g est nulle μ-pp, il n'y a rien à montrer ; on supposera donc que ce n'est pas le cas. Idem si l'une des intégrales de droite vaut $+\infty$. On suppose donc les intégrales du terme de droite sont finies et que l'intégrale du terme de gauche est non-nulle.
On a

$$\forall a, b \in [0,+\infty], \qquad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1.36}$$

On montrera cette inégalité plus loin. Cela permet de voir, en l'appliquant à $a = f(x)$ et $b = g(x)$ et en intégrant sur X par rapport à $d\mu(x)$ que si les intégrales de droites sont finies, l'intégrale de gauche aussi. Alors, par le cas d'égalité (trivial) dans l'inégalité de Hölder, on sait qu'il existe $H \geq 0$ tel que

$$\Big(\int (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \int (f+g)H\,d\mu \quad \text{et} \quad \int H^q\,d\mu = 1.$$

De façon explicite $H = \dfrac{1}{\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/q}}(f+g)^{p-1}$ sur X. On a donc,

$$\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p} = \int fH\,d\mu + \int gH\,d\mu \le 1\times\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p} + 1\times\left(\int g^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

où l'on a utilisé deux fois l'inégalité de Hölder. Cela montre l'inégalité voulue.
On voit qu'il y a égalité si $g = \lambda f$ μ-pp. Réciproquement, pour qu'il y ait égalité, il faut que dans la preuve ci-dessus, il y ait égalité dans les deux inégalités de Hölder utilisées. Et donc, il faut que μ-pp $f = \lambda_1 H^{p-1}$ et $g = \lambda_2 H^{p-1}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Donc il faut que $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda > 0$. $\square$

1.4.3 Espace $\mathcal{L}^p$ et espace L^p

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\| f \|_p := \left(\int_E | f |^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[2] *norme* $\mathcal{L}^p$ de f, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0\ ;\ \mu(\{| f | \ge a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[3] *supremum essentiel* de f.

Définition 1.52 ($p \in [1, +\infty[$)**.** On note $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans ans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $| f |^p$ est μ-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.

Définition 1.53 ($p = \infty$)**.** On note $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont *μ-essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{| f | \ge a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.

On remarquera que pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ on a

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

En effet, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n\ge1}\Big\{|f| \ge \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n}\Big\}\Big)$ et on conclut par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable A on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \le \|f\|_\infty\})$.

Remarque 1.54. Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathcal{L}^p$-réel" ou "espace $\mathcal{L}^p$-complexe".

Remarque 1.55. Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à μ, car pour une fonction dans $\mathcal{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de μ-mesure nulle. En effet, si p est fini, $|f|^p$ μ-intégrable entraîne que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \ge a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \le \mu(\{|f| \ge a\})$.

Proposition 1.56. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a*

1. *$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, et*

2. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
3. mais on devrait dire μ-supremum essentiel

2. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

En particulier, $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Le premier point est évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned} \| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \ge m\}) = 0\} = | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \ge | a | m'\}) = 0\} \\ &= | a | \, inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \ge m'\}) = 0\} = | a | \, \| f \|_\infty. \end{aligned}$$

Le deuxième point est évident pour $p = 1$ à partir de l'inégalité $|f+g| \le |f| + |g|$. Pour $p \in]1, +\infty[$, on combine cela avec l'inégalité de Minkowski. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\mu(\{|f+g| \ge a\}) \le \mu(\{|f| + |g| \ge a\}) = \mu\Big(\{|f| + |g| \ge a\} \cap \{|f| \le \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \le \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0,$$

et donc $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Par ailleurs, si f est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\|\cdot\|_p$ pour être une norme sur $\mathcal{L}^p$? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle μ-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n \ge 1} \{|f| \ge \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.

Ainsi, on veut construite un espace tel que f nulle μ-presque partout veut dire que f est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \ \mu\text{-p.p.} \Longleftrightarrow \|f - g\|_p = 0.$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\|\cdot\|_p$ ne dépend pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p$: la classe d'une fonction f est constituée par les fonctions qui coïncident avec f μ-presque partout.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}.$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathcal{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé, on obtient la

Définition 1.57. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.

Soit $\tilde{f} := \{g \ ; \ g = f \ \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.

On peut également définir $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\| \tilde{f} \|_p = \| f \|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\| f \|_p = \| g \|_p$.

Remarque 1.58. On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.

C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre L^p, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathcal{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que μ-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions f et g sont égales dans L^p si elles coïncident μ-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).

On a alors immédiatement ce que l'on cherchait.

Théorème 1.59. *L'ensemble $(L^p(\mu), \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.60. On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement ℓ_p l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\| u \|_p = \left(\sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.
On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), m)$.

1.4.4 Convergence dans L^p et convergence simple

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \| f - g \|$. Ainsi on dira que la suite (f_n) converge (vers f) dans L^p si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$;

b) $\lim_n \| f - f_n \|_p = 0$.

On rappelle que la suite (f_n) converge simplement vers f si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout x.
On remarque que si (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers f, alors $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. La réciproque est fausse en général.
Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) L^p.

Proposition 1.61. *Convergence L^p-dominée Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$ μ-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $| f_n | \leq g$ pour tout entier n, alors $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$.*

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $| f_n - f |^p \leq (| f_n | + | f |)^p \leq 2^p | g |^p$ μ-p.p., et par hypothèse $| g |^p$ est intégrable, donc comme $| f_n - f |^p \to 0$, μ-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int | f_n - f |^p \, d\mu$. $\square$

Proposition 1.62 (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$, alors il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-p.p.*
Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f$ μ-p.p., pas besoin de sous-suite).

Démonstration. On traite d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Si (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}.$$

Introduisons la suite de fonctions positives $u_k = |f_{n_k} - f|^p$. Par le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) on a

$$\int \sum_{k \geq 0} u_k(x) \, d\mu(x) = \sum_{k \geq 0} \int u_k(x) \, d\mu(x) \leq \sum_{k \geq 0} (2^{1/p})^{-k} < +\infty.$$

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}$ tel que $\forall x \in X \setminus \mathcal{N}$, $\sum_{k \geq 0} u_k(x) < +\infty$. Donc, pour $x \in X \setminus \mathcal{N}$ la série réelle $\sum u_k(x)$ est convergente, et donc son terme général tend vers zéro, c'est à

dire $f_{n_k}(x) \to f(x)$.
Pour $p = +\infty$, c'est la définition de la convergence dans $L^\infty(\mu)$. □

Exemple 1.63. Dans le cas de l'espace ℓ^p (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers la fonction $u \in \ell^p$ si $\sum_k |\, u_k^{(n)}\,|^p < \infty$, si $\sum_k |\, u_k \,|^p < \infty$ et si

$$\lim_n \sum_k |\, u_k^{(n)} - u_k \,|^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace ℓ^p (vrai aussi si $p = +\infty$ par b)ii)),

$$f_n \overset{\ell^p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \qquad \text{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout n, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\|\, u^{(n)} - 0 \,\|_p = (\sum_k |\, u_k^{(n)}\,|^p)^{1/p} = 1$ pour tout p (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^p. En effet, ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction v constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans ℓ^p, donc on ne peut pas appliquer a). De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 1.61 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

Corollaire 1.64. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si l'on a la convergence de la suite (f_n) vers f dans L^p et vers g μ-p.p. alors f et g sont égales μ-p.p.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge μ-p.p. vers f. Or la suite (f_n) converge μ-p.p. vers g, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ μ-p.p. □

1.4.5 Complétude des espaces L^p

Théorème 1.65 (Théorème de Riesz–Fisher)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$. On veut montrer qu'elle converge dans L^p. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ converge. En effet, si f est la limite de cette sous-suite on a alors pour tout n, k,

$$\|f_n - f\|_p \le \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p,$$

et chaque terme peut être rendu petit, le premier en prenant k assez grand (par définition de la limite), et le deuxième en prenant k (puisque $n_k \ge k$) et n assez grands, par le caractère de Cauchy.
Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite (f_{n_k}) tel que

$$\forall k \ge 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \ge 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \ge 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$.
Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \ge 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que U_N converge vers f dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$. $\square$

1.5 Approximation

Théorème 1.66. *(Approximation par des fonctions simples) Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré.*
Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes (i.e. $s = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$) telles que $\mu(\{x;\ s(x) \neq 0\}) < +\infty$.
Pour $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Clairement $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \geq 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \geq 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.40). Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq s_n \leq f$. Ainsi $|f - s_n|^p \leq f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\| \cdot \|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. $\square$

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.