Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

31 janvier 2019

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que U_N converge vers f dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$. $\square$

1.5 Approximation

Théorème 1.66. *(Approximation par des fonctions simples) Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré.*
Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes (i.e. $s = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$) telles que $\mu(\{x;\ s(x) \neq 0\}) < +\infty$.
Pour $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Clairement $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \geq 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \geq 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.40). Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq s_n \leq f$. Ainsi $|f - s_n|^p \leq f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\| \cdot \|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. $\square$

Théorème 1.67. *(Approximation par des fonctions continues) Supposons que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace de Hausdorff localement compact mesuré tel que la mesure μ et la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.18.*
Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Remarque 1.68. Dans ce cadre, on peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ muni de la norme $\|f\|_p$. Alors, $L^p(\mu)$ est le complété de cet espace.

Démonstration. Définissons S comme dans le théorème 1.66. Pour $s \in S$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème 1.40 , le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que g et s coïncident sauf sur un ensemble de mesure majorée par ε et, de plus, $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$. Ainsi, pour $1 \leq p < +\infty$, $\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Le théorème 1.67 est alors un corollaire immédiat du théorème 1.66. □

Corollaire 1.69. *Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $f_x : \ y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x)$. Alors $f_x \underset{|x| \to 0}{\to} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. En effet, les supports des fonctions $(g_x - g)_{|x| \leq 1}$ sont tous contenu dans un compact fixé et ces fonctions sont majorées par $2\|g\|_\infty$. Par continuité, on a $g_x - g \underset{x \to 0}{\to} 0$ en tout point. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\|g_x - g\|_p \underset{x \to 0}{\to} 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, cette convergence s'étend à $L^p(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\|f_x - f\|_p \leq \|g_x - g\|_p + 2\|f - g\|_p$. □

Remarque 1.70. Le corollaire 1.69 nous dit que, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto f_x \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.71. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $u : \ X \to \mathbb{C}$. On dit que u *s'annule à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\overline{\{x; \ |u(x)| \geq \varepsilon\}}$ est compact.
L'ensemble des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est noté $\mathcal{C}_0(X)$.

Théorème 1.72. *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathcal{C}_0(X)$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe K compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $0 \leq g \leq 1$ et $g_{|K} = 1$. Donc $h := fg \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\|f - h\|_\infty \leq \sup_{x \notin K} |(1 - g)(x)f(x)| \leq \sup_{x \notin K} |f(x)| \leq \varepsilon$. Donc, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$.
Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$. Comme $(f_n)_n$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on a que f_n converge uniformément vers f donc f est continue. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ et K_n un compact tel que $\forall x \notin K_n$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc, $\forall x \notin K_n$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi $f \in$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$ qui est donc complet. Ceci complète la preuve du théorème 1.72. □

Remarque 1.73. Remarquons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \neq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 2

Mesures à valeurs complexes et dérivation de mesures

On s'est pour l'instant intéressé à des mesures positives. On va maintenant considérer des mesures à valeurs complexes ou mesures complexes. Ce passage est analogue au passage des séries à termes positifs aux séries à termes complexes.

2.1 Mesures complexes - Variation totale

Définition 2.1. Soit $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur un espace X.
Une *mesure complexe* sur $(X, \mathcal{S})$ est une application $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ telle que, si $E \in \mathcal{S}$ et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de E dans $\mathcal{S}$ (i.e. $\forall i$, $E_i \in \mathcal{S}$, $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ et $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i = E$), on a

$$\mu(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. D'abord la définition implique que tout ensemble mesurable est de mesure $\mu(E)$ finie.
L'égalité (2.1) requiert implicitement que $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| < +\infty$; en effet, pour une partition données, dans la réunion définissant E, on peut réordonner les termes de façon arbitraires. Donc la somme dans le membre de droite de (2.1) doit converger vers la même valeur ce quelque soit la permutation des termes. Ceci impose que la somme converge absolument (voir [5, Théorème 3.56]).

Exercice 2.3. Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $h \in L^1(\lambda)$. Pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$\mu(E) = \int_E h \, d\lambda. \tag{2.2}$$

Montrer que μ est une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$ que l'on notera $d\mu = h \, d\lambda$.

Définition 2.4. Soit μ une mesure à valeur complexe. On définit sa *variation totale* notée $|\mu| : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la façon suivante : pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$|\mu|(E) = \sup_{(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ partition de } E} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(E_j)|.$$

Cette définition nous donne immédiatement que

$$\forall E \in \mathcal{S}, \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E). \tag{2.3}$$

Théorème 2.5. *La variation totale d'une mesure complexe μ sur $\mathcal{S}$ est une mesure positive sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{S}$ et $E = \cup_i E_i$ une partition de E dans $\mathcal{S}$. Pour i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, soit $t_i < |\mu|(E_i)$. Ainsi, E_i admet une partition $(A_{ij})_j$ telle que $\sum_j |\mu(A_{ij}| > t_i$. Comme $(A_{ij})_{i,j}$ fournit une partition de E, on a

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij}| \leq |\mu|(E).$$

En faisant $t_i \to |\mu|(E_i)$ pour chaque i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, on obtient

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{2.4}$$

Montrons l'inégalité réciproque. Pour cela, soit $(A_j)_j$ une seconde partition de E. Alors, pour i fixé, $(A_j \cap E_i)_j$ est une partition de E_i et pour j fixé, $(A_j \cap E_i)_i$ une partition de A_j. Ainsi

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

Comme ceci vaut pour toute $(A_j)_j$ partition de E, on a

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

En se souvenant de (2.4), on voit que $|\mu|$ est σ-additive.
Un calcul trivial donne $|\mu|(\emptyset) = 0$. Ainsi $|\mu|$ est une mesure. □

Théorème 2.6. *Si μ est une mesure complexe sur X, alors $|\mu|(X) < +\infty$.*

Démonstration. On commence par prouver le

Lemme 2.7. *Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Alors, il existe $A \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que*

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Démonstration. On peut écrire $z_j = |z_j| e^{i\theta_j}$. Pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, soit $A(\theta)$ l'ensemble des j pour lesquels $\cos(\theta_j - \theta) > 0$. Ainsi

$$\left| \sum_{j \in A(\theta)} z_j \right| = \left| \sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right| \geq \mathrm{Re} \left(\sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right) = \sum_{j=1}^{N} |z_j| \max(\cos(\theta_j - \theta), 0).$$

On choisit maintenant pour θ la valeur dans $[-\pi, \pi]$ qui maximise la fonction dans le membre de droite de la dernière égalité. La valeur de cette fonction en ce maximum est supérieure à la moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$. On obtient ainsi pour ce θ que, si on pose $A = A(\theta)$ alors

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} |z_j| \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta_j - \theta), 0) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta), 0) d\theta \left[\sum_{j=1}^{N} |z_j| \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

□

Revenons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{S}$ tel que $|\mu|(E) = +\infty$. Soit $t = \pi(1+|\mu(E)|)$. Comme $|\mu|(E) > t$, il existe $(E_i)_{i\geq 1}$, une partition de E et un entier N tels que $\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$. On peut alors appliquer le lemme 2.7 aux complexes $z_i = \mu(E_i)$, $i = 1, \cdots, N$. Ceci nous donne l'existence d'un ensemble $A \subset E$ (A est réunion de E_i bien choisis) tel que $|\mu(A)| > \frac{t}{\pi} > 1$. Mais en posant $B = E \setminus A$, on calcule

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

On a donc partitionné $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ où $|\mu(A)| > 1$ et $|\mu(B)| > 1$. Évidemment, on a soit $|\mu|(A) = +\infty$ ou $|\mu|(B) = +\infty$.
On peut maintenant réappliquer le même procédé à celui de A et B qui est de mesure $|\mu|$ infinie. En procédant ainsi, par récurrence, on construit une suite d'ensembles mesurables, disons, $(C_j)_j$ deux à deux disjoints tel que pour tout j, $|\mu(C_j)| > 1$. La σ-additivité de μ nous dit que $\mu(\cup_j C_j) = \sum_j \mu(C_j)$. Mais ceci ne se peut car cette dernière série ne converge évidemment pas. On obtient la contradiction souhaitée pour achever la preuve du théorème 2.6. □

Proposition 2.8. *L'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ (muni de ses opérations naturelles).*

Exercice 2.9. Démontrer la proposition 2.8.

Définition 2.10. Pour une mesure réelle μ, on définit ses variations positive et négative respectivement comme les mesures positives $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.

On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Cette décomposition est la *décomposition de Jordan* de la mesure μ.

2.2 Absolue continuité

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Soient λ une mesure positive et μ une mesure quelconque (positive ou complexe) sur $(X, \mathcal{S})$.
Le but de ce chapitre va être de comparer ces deux mesures, plus précisément, essayer d'en définir le quotient ; ce n'est bien sûr pas toujours possible.
Commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.11. On dit que μ est *absolument continue* par rapport à λ si et seulement si, pour $E \in \mathcal{S}$, $\lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$. On note alors $\mu \ll \lambda$.

Exemple 2.12. Soit λ une mesure positive sur X et $f \in L^1(\lambda)$. Alors la mesure $\mu := f\,d\lambda$ définie par $\mu(E) := \int_E f\,d\lambda$ pour $E \in \mathcal{S}$ est absolument continue par rapport à λ.
En passant des fonction indicatrices d'ensembles mesurable aux fonctions simples puis aux fonctions mesurables positives, on voit que μ est définie par la propriété $\int_X g\,d\mu = \int_X gf d\lambda$ pour toute g mesurable positive ou pour toute g telle que fg est λ-intégrable.

Définition 2.13.
1. S'il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, on dit que μ est concentrée sur A. De façon équivalente, on peut demander que $\mu(E) = 0$ dès que $E \cap A = \emptyset$.
2. On dit que μ_1 et μ_2, deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$, sont *mutuellement singulières* si elles sont concentrées sur des ensembles disjoints. On note alors $\mu_1 \perp \mu_2$.

Proposition 2.14. *Supposons que λ, μ, μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$ et que λ est positive. Alors :*

1. *si μ est concentrée sur A, $|\mu|$ l'est aussi ;*
2. *si $\mu_1 \perp \mu_2$ alors $|\mu_1| \perp |\mu_2|$;*
3. *si $\mu_1 \perp \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \perp \lambda$;*
4. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \ll \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \ll \lambda$;*
5. *si $\mu \ll \lambda$ alors $|\mu| \ll \lambda$;*
6. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 \perp \mu_2$;*
7. *si $\mu \ll \lambda$ et $\mu \perp \lambda$ alors $\mu = 0$.*

Démonstration. On démontre les propriétés dans l'ordre.

1. Si $E \cap A = \emptyset$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E alors $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $|\mu|(E) = 0$.
2. Ceci suit immédiatement de 1.
3. Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe A_i et B_i disjoints tels que μ_i est concentrée sur A_i et λ sur B_i. Ainsi $\mu_1 + \mu_2$ est concentrée sur $A = A_1 \cup A_2$ et λ est concentrée sur $B = B_1 \cap B_2$. Or $A \cap B \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset$.
4. C'est clair.
5. Si $\lambda(E) = 0$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E, alors $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j. Comme $\mu \ll \lambda$, on a $\mu(E_j) = 0$ pour tout j.. Ainsi $\sum_j |\mu(E_j)| = 0$. On a donc $|\mu|(E) = 0$.
6. Comme $\mu_2 \perp \lambda$, il existe A tel que $\lambda(A) = 0$ et μ_2 concentrée sur A. Comme $\mu_1 \ll \lambda$, pour tout $E \subset A$, $\mu_1(E) = 0$. Ainsi μ_1 est aussi concentrée sur le complémentaire de A.
7. Par le point 6, les hypothèses du point 7 impliquent que $\mu \perp \mu$. Donc $\mu = 0$.

□

2.2.2 Le théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Ce résultat est le principal de ce chapitre. Il établit la comparaison évoquée ci-dessus.

Théorème 2.15 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym)**.** *Soient λ une mesure σ-finie positive et μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors*

1. *il existe une unique paire de mesures complexes μ_a et μ_s sur $(X, \mathcal{S})$ telles que*
$$\mu = \mu_a + \mu_s, \qquad \mu_a \ll \lambda, \qquad \mu_s \perp \lambda \; ; \tag{2.5}$$
si μ est positive alors μ_a et μ_s le sont aussi ;
2. *il existe une unique fonction $h \in L^1(\lambda)$ telle que $d\mu_a = h d\lambda$.*

La paire (μ_a, μ_s) est appelée *décomposition de Lebesgue* de μ par rapport à λ. La fonction h est appelée *dérivée de Radon-Nicodym* de μ par rapport à λ.
Le point (2) du théorème 2.15 est appelé Théorème de Radon-Nikodym. Si λ est σ-finie, il démontre que si μ est absolument continue par rapport à λ alors μ est de la forme donnée dans l'exemple 2.12.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité de la paire (μ_a, μ_s). Supposons que (μ'_a, μ'_s) est une autre paire ayant les mêmes propriétés. Alors $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s$. Or $\mu_a - \mu'_a \ll \lambda$ et $\mu_s - \mu'_s \perp \lambda$ donc $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s = 0$ par les points 3, 4 et 7 de la proposition 2.14.
Pour démontrer l'existence de la décomposition, on va d'abord se ramener au cas $\lambda(X) < +\infty$ et, pour cela, démontrer le

Lemme 2.16. *Soit λ une mesure positive σ-finie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur un ensemble X. Alors, il existe une fonction $w \in L^1(\lambda)$ telle qu'en tout $x \in X$, on a $0 < w(x) < 1$.*

Démonstration. Comme μ est σ-finie, on peut décomposer $X = \cup_{i\geq 1} E_i$ où $E_i \in \mathcal{S}$ et $\lambda(E_i) < +\infty$. Alors, en utilisant le théorème de convergence monotone, on vérifie que la fonction $w = \displaystyle\sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i(1+\lambda(E_i))}\mathbf{1}_{E_i}$ convient □

Soit λ comme dans l'énonce du théorème 2.15. Avec w choisie comme dans le lemme 2.16, la mesure $d\tilde{\lambda} := w\,d\lambda$ est finie et elle a les mêmes ensembles de mesure nulle que λ c'est-à-dire que $\lambda \ll \tilde{\lambda} \ll \lambda$. En effet, si $\tilde{\lambda}(E) = \displaystyle\int_E w d\lambda = 0$ alors, comme elle est positive, w est nulle λ-presque partout sur E or w ne s'annule nulle part ; c'est donc que $\lambda(E) = 0$.
Soit μ comme dans l'énoncé du théorème 2.15. Commençons par supposer que μ positive et finie. Alors la mesure $d\nu = d\mu + wd\lambda$ est aussi positive et finie. Par définition (voir l'exemple 2.12), pour toute f mesurable positive, on a

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\mu + \int_X f\, w\, d\lambda \geq \int_X f d\mu.$$

Comme ν est finie, on sait que $L^2(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L^1(\mu)$ (par l'inégalité ci-dessus). Donc si $f \in L^2(\nu)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on calcule

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\nu \leq \sqrt{\nu(X)}\|f\|_{L^2(\nu)}.$$

Ainsi l'application linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_X f d\mu$ est une forme linaire bornée sur $L^2(\nu)$. Par le théorème de Riesz-Fisher (cf [1, Chapitre 4.4]), il existe $g \in L^2(\nu)$ telle que, pour $f \in L^2(\nu)$, on a

$$\int_X f d\mu = \int_X f g d\nu. \tag{2.6}$$

Remarquons que $g \in L^2(\nu)$ n'est définie que ν-presque partout.
Comme $0 \leq \mu \leq \nu$, en appliquant (2.6) à $f = \mathbf{1}_E$ où $E \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(E) > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E g\, d\nu = \frac{\mu(E)}{\nu(E)} \leq 1$$

On en déduit que ν-presque partout, on a $0 \leq g \leq 1$. On peut donc supposer sans modifier (2.6) que g est à valeurs dans $[0,1]$. En se souvenant de $d\nu = d\mu + wd\lambda$, réécrivons (2.6) comme

$$\int_X (1-g) f d\mu = \int_X f\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.7}$$

Posons $A := \{x;\ 0 \leq g(x) < 1\}$ et $S := \{x;\ g(x) = 1\}$ et définissons deux mesures μ_a et μ_s par $\mu_a(E) = \mu(A \cap E)$ et $\mu_s(E) = \mu(S \cap E)$ pour $E \in \mathcal{S}$.
Pour $f = \mathbf{1}_S$, le membre de gauche de (2.7) s'annule et celui de droite devient $\int_S w d\lambda$. Comme w est positive et ne s'annule pas, on voit que $\lambda(S) = 0$. Donc $\mu_s \perp \lambda$.
Comme g est bornée, dans (2.7), on peut remplacer f par $(1 + g + \cdots + g^n)\mathbf{1}_E$ pour un entier n arbitraire ce qui nous donne

$$\int_{A\cap E} (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.8}$$

Comme en tout point $x \in A$, $g^n(x) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\mu(A \cap E) = \mu_a(E)$.
La suite $((1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w)_n$ est positive et croissante ; elle converge donc vers une fonction mesurable positive que l'on notera h. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\int_E h d\lambda$ quand $n \to +\infty$. Pour $E = X$, comme λ_a est finie, on obtient que $h \in L^1(\lambda)$. Ceci prouve le point 2 du théorème 2.15. Mais ce point 2 implique immédiatement que $\mu_a \ll \lambda$ (voir l'exemple 2.12). Ceci achève la preuve du théorème 2.15 quand μ est positive.
Pour μ complexe, on écrit $\mu = \mu_r + i\, \mu_i$ où μ_r et μ_i sont des mesures réelles, puis, on applique la construction précédente aux variations positives et négatives de ces mesures.
Le théorème 2.15 est démontré. □

Remarque 2.17. Si μ est positive et σ-finie, les conclusions du théorème 2.15 pour λ et μ restent presque toutes vraies : simplement, la fonction h n'est plus nécessairement intégrable mais elle est mesurable à valeurs positives. Pour voir cela, on décompose $X = \cup_n X_n$ où $(\mu + \lambda)(X_n) < +\infty$ pour tout n. Sur chaque X_n i.e. pour $\lambda_{|X_n}$ et $\mu_{|X_n}$, on applique le théorème 2.15 pour obtenir h_n sur X_n ; l'unicité nous permet de dire que si $\lambda(X_n \cap X_m) \neq 0$, alors $(h_n)_{|X_n \cap X_m} = (h_m)_{|X_n \cap X_m}$. La famille $(h_n, X_n)_n$ définit donc bien une fonction h positive et mesurable qui vérifie la propriété souhaitée. De plus, elle est également "localement" intégrable au sens où, pour tout n, $\int_{X_n} h\, d\lambda < +\infty$.

Remarque 2.18. On ne peut pas simplement omettre l'hypothèse de σ-finitude sur λ. Par exemple, sur $[0, 1]$ on peut supposer que λ est la mesure de Lebesgue et μ la mesure de comptage (toutes deux sur la σ-algèbre de Lebesgue). Alors μ n'a pas de décomposition de Lebesgue par rapport à λ et, bien que λ soit bornée et $\lambda \ll \mu$, il n'existe pas de fonction $h \in L^1(\mu)$ telle que $d\lambda = h d\mu$.

Théorème 2.19. *Soient λ et μ deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$ respectivement positive et complexe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mu \ll \lambda$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tel que* $\sup\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \lambda(E) < \delta}} |\mu|(E) \leq \varepsilon$.

Remarque 2.20. Dans le théorème 2.19, si μ est une mesure positive mais de masse totale infinie, on n'a pas forcément (1) $\Longrightarrow$ (2). On peut par exemple prendre μ égale à la mesure de Lebesgue sur $(0, 1)$ et poser $\mu(E) = \displaystyle\int_E x^{-1} dx$ pour $E \subset (0, 1)$ Lebesgue mesurable.

Démonstration. Supposons 2. Si $\lambda(E) = 0$ alors $\lambda(E) < \delta$ pour tout $\delta > 0$. Donc $|\mu|(E) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire $|\mu|(E) = 0$, soit encore, $\mu(E) = 0$. On obtient donc le point 1.
Supposons que le point 2 est faux. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $E_n \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ et $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Donc $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Posons

$$\forall n \geq 1, A_n = \bigcup_{m \geq n} E_m \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Alors $\lambda(A_n) < 2^{-n+1}$ et $A_{n+1} \subset A_n$. Donc, par convergence monotone $\lambda(A) = 0$ et $|\mu|(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} |\mu|(A_n) \geq \varepsilon > 0$ (comme $|\mu|(A_n) \geq |\mu|(E_n)$). Ceci contredit $|\mu| \ll \lambda$ et, en utilisant le point 5 de la proposition 2.14, cela contredit également le point 1.
Ceci achève la preuve du théorème 2.19. □

2.2.3 Conséquences du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Les mesures que nous considérons sont σ-finies.

Théorème 2.21 (Décompostion polaire d'une mesure complexe)**.** *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe h mesurable telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et $d\mu = h\,d|\mu|$.*

Ce résultat est le pendant pour les mesures complexes de la décomposition polaire des nombres complexes.

Démonstration. On a bien sûr $\mu \ll |\mu|$. Donc le théorème 2.15 garantit l'existence de $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $d\mu = h\,d|\mu|$.
Pour $r > 0$, soit $A^r = \{x;\ |h(x)| < r\}$ et soit $(A^r_j)_j$ une partition de A^r. Alors

$$\sum_j |\mu(A^r_j)| = \sum_j \left| \int_{A^r_j} hd|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(A^r_j) = r|\mu|(A_r).$$

En maximisant sur les partitions, on obtient que $r|\mu|(A_r) \geq |\mu|(A_r)$. Donc si $r < 1$, $|\mu|(A_r) = 0$. Ainsi $|h| \geq 1$ $|\mu|$-presque partout.
D'autre part, si $|\mu|(E) > 0$, comme $d\mu = h\,d|\mu|$, on a

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\,d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1. \tag{2.9}$$

Ainsi $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout. En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) > 0$. On écrit $h(x) = e^{i\theta(x)}|h(x)|$ avec θ mesurable à valeurs dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, pour tout $n > 0$, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $|\mu|(E_{n,\varepsilon}) > 0$ où on a posé $E_{n,\varepsilon} := \{|h(x)| > 1 + \varepsilon$ et $n\theta(x) \in 2\pi[k-1, k[\}$; alors

$$\frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\,d|\mu| = e^{2i\pi k/n} \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h|\,d|\mu| + \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h(x)| \left(e^{i\theta(x)} - e^{2i\pi k/n} \right) d|\mu|.$$

Ainsi, si n est assez grand, on obtient

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\,d|\mu| \right| \geq 1 + \varepsilon - \frac{1}{n\varepsilon} > 1.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) = 0$. Donc, comme $h \in L^1(|\mu|)$, on a $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout.
On voir que, $|\mu|$-presque partout, $|h| = 1$. On peut donc prendre $|h| = 1$ en tout point sans modifier la validité de $d\mu = h\,d|\mu|$. Ceci achève la preuve du théorème 2.21. ☐

Théorème 2.22. *Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $g \in L^1(\lambda)$. Si on pose $d\mu = g\,d\lambda$ alors $d|\mu| = |g|\,d\lambda$.*

Démonstration. Par le théorème 2.21, on peut écrire $d\mu = h\,d|\mu|$ avec $|h| = 1$. Par hypothèse, $d\mu = g\,d\lambda$ et $|\lambda| = \lambda$ (comme λ est positive). Ainsi $d|\mu| = \overline{h}\,d\mu = \overline{h}\,g\,d\lambda$. Or λ et μ sont positives ; donc $\overline{h}g$ est positive λ-presque partout ; comme $|h| = 1$, λ-presque partout, on a $\overline{h}g = |g|$. ☐

Théorème 2.23 (Décompostion de Hahn)**.** *Soit μ une mesure réelle sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe deux ensembles A_+ et A_- mesurables tels que $A_+ \cup A_- = X$, $A_+ \cap A_- = \emptyset$ et tels que les variations positives et négatives de μ vérifient $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\,d\mu$ et $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\,d\mu$.*

Ce théorème nous dit que l'on peut trouver deux ensembles disjoints tels que l'un porte toute la masse positive de μ et l'autre toute sa masse négative.

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.