Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

21 février 2019

Alors $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j C_{N,j} e^{ijt}$ où $C_{N,j} = \max(0, 2N+1-|j|)$ i.e. le nombre de façon de décomposer $j = m-n$ avec $|n| \leq N$ et $|m| \leq N$. Donc,

$$\sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) a_n e^{int} = \frac{1}{2N+1} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} \geq 0.$$

On obtient l'existence de μ en appliquant le théorème 3.47 et son unicité par le corollaire 3.43. $\square$

3.1.6 Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires et auto-adjoints bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un opérateur borné (i.e. un endomorphisme continu) ; on notera $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace de Banach des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ muni de sa norme induite par celle de $\mathcal{H}$). On rappelle que $\mathrm{Ker} A = \{v \in \mathcal{H}; Av = 0\}$ et $\mathrm{Im} A = \{Av; v \in \mathcal{H}\}$. On définit l'adjoint de A, noté A^*, comme l'unique endomorphisme vérifiant $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ pour tout $(u,v) \in \mathcal{H}^2$. L'existence et l'unicité sont garanties par le théorème de représentation de Riesz.
On vérifie facilement

Lemme 3.50. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On a*
- $(A^*)^* = A$;
- $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \|A^*\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$;
- *$\mathrm{Ker}\, A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$.*

Démonstration. Le premier point est évident par la définition de l'adjoint. Le deuxième est une conséquence de cette définition et de la formule $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \sup_{|u|=|v|=1} |\langle Au, v\rangle|$.
Enfin

$$u \perp \mathrm{Im}\, A \Longleftrightarrow \forall v \in \mathcal{H},\ \langle Av, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall v \in \mathcal{H},\ \langle v, A^*u\rangle = 0 \Longleftrightarrow A^*u = 0.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$. Donc, $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, (A^*)^* = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$. $\square$

dans la suite, pour simplifier les notations, on identifiera l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$ avec 1 i.e. pour $z \in \mathbb{C}$, on écrire simplement z à la place de $z\,\mathrm{Id}$.

Définition 3.51. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est dans *l'ensemble résolvant* de A, noté $\rho(A)$, si $A - z$ est inversible d'inverse borné sur $\mathcal{H}$. Le *spectre* de A, noté $\rho(A)$, est le complémentaire de l'ensemble résolvant de A i.e. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Lemme 3.52. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
Si $z_0 \in \rho(A)$, alors $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$.
L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{C} \setminus D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})$ et l'application $z \in \rho(A) \mapsto (A - z)^{-1}$ est développable en série entière sur $\rho(A)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \rho(A)$. Alors

$$A - z = (A - z_0)\left(1 - (z - z_0)(A - z_0)^{-1}\right).$$

Donc si $|z - z_0|\|(A - z_0)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} < 1$, un inverse de $A - z$ est immédiatement donné par le série de Neuman

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (z - z_0)^n (A - z_0)^{-n-1} \tag{3.28}$$

qui converge normalement (car $\|A^n\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \|A\|^n_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$). Ainsi $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$ et (3.28) nous le développement en série entière annoncé au voisinage de z_0.
Pour $|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$, on utilise le développement de Neuman (au voisinage de l'infini)

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^{-1-n} A^n$$

qui converge normalement. Donc $\{|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}\} \subset \rho(A)$. □

Le lemme 3.52 implique immédiatement que $\sigma(A)$ est fermé dans $\overline{D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})}$, donc, compact.

Définition 3.53. On dit que A est *auto-adjoint* si $A^* = A$. On dit que A est *unitaire* si $AA^* = A^*A = 1$.

Les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont intimement liés.

Lemme 3.54. *Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors $A - i = (A+i)^*$ est inversible et $U := (A+i)((A+i)^*)^{-1} = (A+i)(A-i)^{-1}$ est unitaire et $1 \in \rho(U)$. U est la transformée de Cayley de A.*
Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ tel que $U-1$ est inversible d'inverse borné (i.e. $1 \in \rho(U)$). Alors $A := i(U+1)(U-1)^{-1}$ est borné et auto-adjoint.

On vérifie que les deux transformations introduites dans le lemme précédent sont l'inverse l'une de l'autre. Le point i ne joue pas de rôle particulier dans la transformation de Cayley : on peut le remplacer par un complexe quelconque hors de la droite réelle. La transformation inverse dépend bien sûr de ce point.

Preuve du lemme 3.54. Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Montrons que $A - i$ est inversible. Il est injectif car, pour $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|(A - i)u\|^2 &= \|Au\|^2 + \|u\|^2 - \langle Au, iu\rangle - \langle iu, Au\rangle = \|Au\|^2 + \|u\|^2 - i\langle Au, u\rangle + i\langle Au, u\rangle \\ &= \|Au\|^2 + \|u\|^2.\end{aligned} \tag{3.29}$$

On montre de même que $\mathrm{Ker}(A + i) = \{0\}$.
Il est surjectif. Remarquons qu'il suffit de montrer que $\mathrm{Im}A - i$ est fermée. En effet si c'est le cas alors par le dernier point du lemme 3.50, on sait que $\mathrm{Im}\,(A - i) = (\mathrm{Ker}(A + i))^\perp = \mathcal{H}$.
Soit $v \in \overline{\mathrm{Im}\,(A - i)}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $(A - i)u_n \underset{n\to+\infty}{\to} v \in \mathcal{H}$. Alors par (3.29), on a $\|u_n - u_m\|^2 \leq \|(A-i)(u_n - u_m)\|^2$. Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy et donc converge vers $u \in \mathcal{H}$. Comme A est borné, on obtient que $(A - i)u = v$. Ainsi $v \in \mathrm{Im}\,(A - i)$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(A - i) = \mathcal{H}$.
Vérifions que $U := (A+i)(A-i)^{-1}$ qui est borné comme composé d'opérateurs bornés est unitaire. Comme A est auto-adjoint, $(A \pm i)^* = A \mp i$. D'autre part, $A - i$ et $A + i$ commutent, donc $(A - i)^{-1}$ et $A + i$ aussi. Ainsi

$$UU^* = (A + i)(A - i)^{-1}(A + i)^{-1}(A - i) = (A - i)^{-1}(A + i)(A + i)^{-1}(A - i) = 1.$$

Enfin on calcule $U - 1 = (A + i)(A - i)^{-1} - 1 = 2i(A - i)^{-1}$ ce qui prouve que $U - 1$ est inversible.
Pour la seconde assertion, en utilisant le fait que U est unitaire, on calcule

$$A^* = -i(U^* + 1)(U^* - 1)^{-1} = -i(1 + U)U^*(U^*)^{-1}(1 - U)^{-1} = i(U + 1)(U - 1)^{-1} = A.$$

□

Lemme 3.55. *Soit A auto-adjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ et, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a*

$$\|(A - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{|Im\, z|} = \frac{1}{dist(z, \mathbb{R})}. \tag{3.30}$$

Si U est unitaire alors $\sigma(U) \subset \{|z| = 1\}$ et, pour $|z| \neq 1$, on a

$$\|(U - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{||z| - 1|} = \frac{1}{dist(z, \{|z| = 1\})}. \tag{3.31}$$

Démonstration. La démonstration du premier point suit celle de l'inversiblité de $A - i$ dans la preuve du lemme 3.54 et (3.29) devient

$$\|(A-z)u\|^2 = \|Au\|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2 \geq |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2. \tag{3.32}$$

Ainsi $\|u\| \geq |\mathrm{Im}\, z|\|(A-z)^{-1}u\|$.
Soit U unitaire ; donc $\|U\| = 1$. Pour $|z| > 1$, $U - z = z(z^{-1}U - 1)$ est donc inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U-z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^{-1-n}U^n$. Donc, pour $|z| > 1$,

$$\|(U-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-1-n} = \frac{|z|^{-1}}{1-|z|^{-1}} = \frac{1}{|z|-1}$$

De même, pour $|z| < 1$, $U - z = U(1 - zU^*)$ est inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U-z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^n (U^*)^{n+1}$. Donc, pour $|z| < 1$,

$$\|(U-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-n} = \frac{1}{1-|z|}$$

□

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ un sous espace vectoriel.

Définition 3.56. On dit que $\mathcal{E}$ est *invariant* ou *stable* par A linéaire borné si $A\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$.

Lemme 3.57. *Si $\mathcal{E}$ fermé et invariant par U unitaire (resp. A auto-adjoint), alors $U_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est unitaire (resp. $A_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est auto-adjoint) ; ici $\mathcal{E}$ est muni de la structure hilbertienne induite par celle de $\mathcal{H} \supset \mathcal{E}$. De plus dans ce cas U (resp. A) se décompose sur la somme directe orthogonale $\mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E}^\perp$ en $\begin{pmatrix} U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} A_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & A_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$) où $\mathcal{E}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{E}$. On a alors que $\sigma(U) = \sigma(U_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(U_{|\mathcal{E}^\perp})$ (resp. $\sigma(A) = \sigma(A_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(A_{|\mathcal{E}^\perp})$).*

M

Démonstration. Si $U\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, on peut considérer $U_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On a bien sûr, pour $u \in \mathcal{E}$, $\|Uu\|^2 = \|U_{|\mathcal{E}}u\|^2 = \|u\|^2$; donc par l'identité du parallélogramme, pour $(u, v) \in \mathcal{E}^2$

$$\langle (U_{|\mathcal{E}})^* U_{|\mathcal{E}} u, v\rangle = \langle U_{|\mathcal{E}} u, U_{|\mathcal{E}} v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Ainsi $(U_{|\mathcal{E}})^* U_{|\mathcal{E}} = 1$; de même $U_{|\mathcal{E}}(U_{|\mathcal{E}})^* = 1$. De plus on voit que $(U_{|\mathcal{E}})^* = (U^*)_{|\mathcal{E}}$.
De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est stable par U ; en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Uv, u\rangle = \langle v, U^*u\rangle = 0$ car $U^*u \in \mathcal{E}$.
D'autre part ceci Si A est auto-adjoint et $\mathcal{E}$ sous-espace stable par $\mathcal{A}$,, le fait que $A_{|\mathcal{E}}$ est clair par la définition. De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est aussi stable par A : en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle = 0$ car $Au \in \mathcal{E}$. Ceci donne donc la décomposition annoncée.
Enfin, l'assertion sur les spectres découle du calcul

$$\begin{pmatrix} z - U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & z - U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - U_{|\mathcal{E}})^{-1} & 0 \\ 0 & (z - U_{|\mathcal{E}^\perp})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

□

Définition 3.58. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{H}$. *L'espace cyclique pour* U *engendré par* u est la clôture de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n u)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On dira qu'un espace $\mathcal{E}$ est *cyclique pour* U s'il est l'espace cyclique pour U engendré par un certain vecteur u. Dans ce cas on dira que le vecteur u est *cyclique pour* U *et* $\mathcal{E}$.

Lemme 3.59. *Soit* U *unitaire. Alors il existe* $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ *et* $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *une famille au plus dénombrable de sous-espaces de* $\mathcal{H}$ *cycliques pour* U *deux à deux orthogonaux tels que* $\mathcal{H}$ *soit la somme directe de ces sous-espaces i.e.* $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$.

Démonstration. Si $\mathcal{H} = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Sinon soit $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (où $\mathcal{M}$ est un intervalle d'entiers non nuls contenant 1).
On pose $f_1 = e_1$ et $m_1 = 1$. Considérons $\mathcal{E}_1$ l'espace cyclique pour U engendré par f_1. Si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}$, on a fini. Sinon on peut trouver $m_2 \in \mathcal{M}$ tel que pour $m < m_2$, $e_m \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 := \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \neq 0$ (où $\Pi_{\mathcal{E}_1^\perp}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{E}_1^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{E}_1$). Considérons $\mathcal{E}_2$ l'espace cyclique pour U engendré par f_2. Alors $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$. En effet, comme U est unitaire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle U^n f_1, U^m f_2\rangle = \langle U^{n-m} f_1, f_2\rangle = 0$. Ainsi l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n f_1)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonal à celui engendré par les vecteurs $(U^n f_2)_{n\in\mathbb{Z}}$. Et on conclut pour les clôtures par bicontinuité du produit scalaire. D'autre part, on sait que $\{e_m; 1 \le m \le m_2\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. En effet, par hypothèse sur m_2, on sait que $\{e_m; 1 \le m \le m_2 - 1\} \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Et $e_{m_2} = \Pi_{\mathcal{E}_1} e_{m_2} + \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \in \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.
Par récurrence, on construit ainsi une suite strictement croissante $(m_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dans $\mathcal{M}$ et $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ une famille (au plus dénombrable) de sous-espaces de $\mathcal{H}$ fermés deux à deux orthogonaux tous cycliques pour U tels que, pour tout n, $\{e_m; 1 \le m \le m_n\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n$.
On obtient ainsi que $\{e_m; m \in \mathcal{M}\} \subset \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. Or $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ car tous les $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ le sont. Donc, $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ contient la clôture de l'espace vectoriel engendré par $\{e_m; m \in \mathcal{M}\}$ qui est $\mathcal{H}$ car $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
Ceci achève la preuve du lemme. □

Théorème 3.60 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires)**.** *Soit* U *un opérateur unitaire sur* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ *et une mesure de probabilité borélienne sur* $\mathbb{T} \times \mathcal{N}$*, disons,* μ*, appelée mesure spectrale et* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ *un opérateur unitaire tel que* $\mathcal{U} U \mathcal{U}^*$ *soit l'opérateur de multiplication par* $e^{it} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *i.e. pour* $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U} U \mathcal{U}^* f](t, n) = e^{it} f(t, n)$ *pour* $(t, n) \in \mathbb{T} \times \mathcal{N}$*. De plus* $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t, n) \in \mathit{supp}\,\mu\right\}$.

Ceci correspond à la diagonalisation des matrices dans le cas quand $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Démonstration. Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires est une conséquence directe des lemmes 3.57 et 3.59 et du théorème suivant.

Théorème 3.61 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires dans le cas cyclique)**.** *Soit* U *un opérateur unitaire sur* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour* U*.*
Alors il existe une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}$*, disons,* μ*, appelée mesure spectrale et* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ *un opérateur unitaire tel que* $\mathcal{U} U \mathcal{U}^*$ *soit l'opérateur de multiplication par* $e^{it} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *i.e. pour* $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U} U \mathcal{U}^* f](t) = e^{it} f(t)$*. De plus* $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ t \in \mathit{supp}\,\mu\right\}$.

En effet, par les lemmes 3.57 et 3.59, U se décompose en la somme directe $\oplus_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n}$ correspondant à la décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. On peut alors pour chaque n dans $\mathcal{N}$ considérer la mesure spectrale μ_n (sur $\mathbb{T}$) et l'opérateur unitaire $\mathcal{U}_n :\ \mathcal{E}_n \mapsto L^2(\mu_n)$ obtenus par le théorème 3.61 et définir la mesure μ sur $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$ de la façon suivante : si A est un borélien de $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$,

$$\mu(A) = c_{\mathcal{N}} \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A(t,n)(n+1)^{-2} d\mu_n(t)$$

où $(c_{\mathcal{N}})^{-1} := \sum_{n\in\mathcal{N}}(n+1)^{-2}$. Alors μ est une mesure de probabilité et $L^2(\mu)$ est l'espace des fonctions $f :\ \mathbb{T}\times\mathcal{N}\to\mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_{\mathbb{T}}\sum_{n\in\mathcal{N}} |f(t,n)|^2(1+n)^{-2}d\mu_n(t)$. On peut alors considérer l'opérateur $\mathcal{U} :\ \mathcal{H}\mapsto L^2(\mu)$ définie par

$$\text{pour } e = \sum_{n\in\mathcal{N}} e_n \text{ où } e_n\in\mathcal{E}_n,\ \mathcal{U}(e)(t,n) = \frac{1}{\sqrt{c_{\mathcal{N}}}}(n+1)\left[\mathcal{U}_n(e_n)\right](t).$$

On calcule alors

$$\|\mathcal{U}(e)\|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}}\sum_{n\in\mathcal{N}} |\mathcal{U}(e)((t,n)|^2(1+n)^{-2}d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{T}}\sum_{n\in\mathcal{N}} \left|\mathcal{U}_n(e_n)\right|^2(t)d\mu_n(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}}\|e_n\|^2_{\mathcal{H}} = \|e\|^2_{\mathcal{H}}.$$

De plus, par le théorème 3.61, en utilisant les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(Ue)(t,n) &= \mathcal{U}\left(\sum_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n} e_n\right)(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{U}_n\left(U_{|\mathcal{E}_n}e_n\right)(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}} e^{it}\mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t) = e^{it}\sum_{n\in\mathcal{N}}\mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t)\\ &= e^{it}\mathcal{U}(e)(t,n).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $f\in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^*f](t,n) = e^{it}f(t,n)$ pour $(t,n)\in\mathbb{T}\times\mathcal{N}$.
Pour démontrer la dernière assertion du théorème 3.60, il suffit de constater que $\sigma(U) = \bigcup_{n\in\mathcal{N}}\sigma(U_{|\mathcal{E}_n})$ (par le lemme 3.57) et d'utiliser la définition de μ en terme des $(\mu_n)_{n\in\mathcal{N}}$ et la dernière assertion du théorème 3.61. Ceci achève la preuve du théorème 3.60. □

Preuve du théorème 3.61. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour U et soit f un vecteur cyclique tel que $\|f\|_{\mathcal{H}} = 1$.
Pour $n\in\mathbb{Z}$, posons $a_n := \langle U^{-n}f, f\rangle$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie positive (cf définition 3.48. En effet, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, comme U est unitaire, on calcule

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n}z_m\overline{z_n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\langle U^mf, U^nf\rangle z_m\overline{z_n} = \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}\overline{z_m}U^mf\right\|^2 \geq 0. \tag{3.33}$$

Par le théorème 3.49, il existe alors une mesure positive borélienne sur $\mathbb{T}$, disons, μ telle que $\hat{\mu}(n) = a_n$. On a $\mu(\mathbb{T}) = \hat{\mu}(0) = a_0 = \|f\|^2 = 1$. Donc μ est une mesure de probabilité.
Par le calcul (3.33), pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_mU^mf\right\|^2 = \int_{\mathbb{T}}\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_me^{imt}\right|^2 d\mu(t). \tag{3.34}$$

Donc, si on pose $\mathcal{U}(U^nf) := e^{int}$, on peut étendre $\mathcal{U}$ à l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^nf)_{n\in\mathbb{Z}}$ en une application linéaire à valeurs dans $L^2(\mu)$. Par (3.34), on voit donc que $\mathcal{U}$ définit une isométrie de l'espace

vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $L^2(\mu)$. Comme par hypothèse, l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{H}$, elle s'étend en une isométrie à $\mathcal{H}$ tout entier. Elle est clairement injective. Elle est aussi surjective. En effet, l'image de $\mathcal{U}$ contient le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques qui est dense dans $L^2(\mu)$ par application des théorèmes 1.67 et 3.18 ; de plus, l'image est fermée : si $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, alors $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme $\|\mathcal{U}u_n - \mathcal{U}u_m\|_{L^2(\mu)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; elle converge donc, disons, vers u et par continuité, $v = \mathcal{U}u$.
Ainsi $\mathcal{U}$ est unitaire.
D'autre part, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\mathcal{U}\left[U\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right)\right] = \mathcal{U}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^{m+1} f\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m e^{i(m+1)t} = e^{it}\mathcal{U}\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right].$$

Par densité et continuité, cette relation s'étend à tout $\mathcal{H}$; on vient donc de montrer que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur $L^2(\mu)$.
Montrons que $\sigma(U) = \{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\}$. Clairement, si $z \notin \{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\}$, alors l'application $t \mapsto |e^{it} - z|$ est minorée par $c > 0$ sur $\operatorname{supp}\mu$. Ainsi, dans $L^2(\mu)$, l'opérateur $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)^{-1}f$. En conjuguant par l'opérateur unitaire $\mathcal{U}$, on obtient que dans $\mathcal{H}$, l'opérateur $f \mapsto (U - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (U - z)^{-1}f$. Ainsi $z \notin \sigma(U)$.
Réciproquement, si $z \in \{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\}$, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\mu(T_\varepsilon) > 0$ où $T_\varepsilon = \{t;\ e^{it} \in D(z,\varepsilon) \cap \{|z'| = 1\}\}$. Donc, si on pose $u_\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_{T_\varepsilon})$, on calcule

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{T_\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\right)^2 d\mu(t) = \frac{\mu(T_\varepsilon)}{\mu(T_\varepsilon)} = 1 \quad \text{et} \quad \|(U-z)u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu(T_\varepsilon)}\int_{T_\varepsilon}\left|e^{it} - z\right|^2 d\mu(t) \le \varepsilon^2.$$

Ainsi, si $z \notin \sigma(U)$ alors $(U - z)^{-1}$ existerait et serait borné, disons, par $C > 0$ et ainsi

$$1 = \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} = \|(U-z)^{-1}(U-z)u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \le C\varepsilon$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui est absurde. Donc $z \in \sigma(U)$.
Ceci conclut la preuve du théorème 3.61. □

Comme corollaire du théorème 3.60, on obtient

Théorème 3.62 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés)**.** *Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ et une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U}:\ \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}A\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $t:\ L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t,n) = tf(t,n)$ pour $(t,n) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}$. De plus $\sigma(A) = \{t;\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t,n) \in \operatorname{supp}\mu\}$.

Démonstration. Suivant le lemme 3.54, on construit l'opérateur unitaire $U := (A+i)(A-i)^{-1}$ et par le théorème 3.60, $\tilde{\mu}$ la mesure spectrale sur $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$ associée à U ; appelons $\tilde{\mathcal{U}}$ l'application unitaire associée de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ qui conjugue U en la multiplication par e^{it} (donnée par le théorème 3.60). Comme $1 \in \rho(U)$, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it}, n);\ n \in \mathcal{N},\ t \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$. Comme $A := i(U+1)(U-1)^{-1}$, pour $f \in L^2(\tilde{\mu})$, on calcule

$$\tilde{\mathcal{U}}A\tilde{\mathcal{U}}^* f(t,n) = i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}f(t,n) = \operatorname{cotan}(t/2)f(t,n). \tag{3.35}$$

Posons $\varphi : \mathbb{T} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R} \times \mathcal{N}$ l'application définit par $\varphi(t,n) = (\text{cotan}(t/2), n)$. Soit $\mu = \varphi_*(\tilde{\mu})$ la mesure image de $\tilde{\mu}$ par φ. On définit $\mathcal{V} : L^2(\mu) \to L^2(\tilde{\mu})$ par $\mathcal{V}(f)(t,n) = f \circ \varphi(t,n)$. Alors

$$\|\mathcal{V}(f)\|^2_{L^2(\tilde{\mu})} = \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{T}} |f\circ\varphi|^2(t,n)d\tilde{\mu}(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}} |f|^2(t,n)d\mu(t,n) = \|f\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Comme le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it}, n);\ n \in \mathcal{N},\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$, on voit que φ est bijective bicontinue de $\operatorname{supp}\tilde{\mu}$ dans $\operatorname{supp}\mu$. Ainsi $\mathcal{V}$ est unitaire de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\tilde{\mu})$. Si maintenant on pose $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$, on obtient que $\mathcal{U}$ est unitaire de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ et la relation (3.35) devient, pour $f \in L^2(\mu)$,

$$\mathcal{U} A \mathcal{U}^* f(t,n) = tf(t,n).$$

Le calcul de $\sigma(A)$ étant immédiat par le théorème 3.60 et l'inverse de la transformée de Cayley, ceci achève la preuve du théorème 3.62. □

Le théorème 3.62 correspond à la diagonalisation des matrices dans le cas quand $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

3.2 Convergence des séries de Fourier

La convergence des séries de Fourier est un problème qui se révèle épineux, surtout, celui de la convergence ponctuelle. Souvent les convergences dans certaines normes fonctionnelles sont plus simples à traiter. La question de la convergence est reliée à celle de l'existence et des propriétés de la fonction conjuguée (voir la section 3.1.1).

3.2.1 Convergence en norme dans les espaces de Banach homogènes

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{B}$, on rappelle que

$$S_n(f) = (D_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt}. \tag{3.36}$$

Définition 3.63. On dit que $\mathcal{B}$ a la *propriété de convergence en norme* si, pour $f \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} = 0. \tag{3.37}$$

On a déjà vu que $L^2(\mathbb{T})$ a la propriété de la convergence en norme. On veut maintenant caractériser les espaces de Banach homogènes l'ayant.
L'application $S_n :\ f \mapsto S_n(f)$ est bien définie et laisse $\mathcal{B}$ invariant. Comme son image est de dimension finie $2n+1$, elle est bornée et on note $\|S_n\|^{\mathcal{B}}$ sa norme.

Théorème 3.64. *Un espace de Banach homogène $\mathcal{B}$ a la propriété de convergence en norme si et seulement si la suite $(\|S_n\|^{\mathcal{B}})_{n\geq 1}$ est bornée c'est-à-dire si et seulement s'il existe $K > 0$ telle que*

$$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ f \in \mathcal{B}, \quad \|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.38}$$

Démonstration. D'une part, si $(S_n(f))_{n\geq 1}$ tend vers f pour tout f dans $\mathcal{B}$, alors par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2, polycopié de JY. Chemin 4M005), on sait que (3.38) est vraie.
Réciproquement, supposons (3.38). Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/(K+1)$ (leur existence est garantie par le théorème 3.18 appliqué au noyau de Fejér). Pour n supérieur au degré de P, on a bien sur $S_n(P) = P$. Donc

$$\|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} \leq \|S_n(f) - S_n(P)\|_{\mathcal{B}} + \|P - f\|_{\mathcal{B}} \leq K\varepsilon/(K+1) + \varepsilon/(K+1) = \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.64. □

Comme $S_n(f) = D_n * f$, on a $\|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1 \|f\|_{\mathcal{B}}$ par la proposition 3.16. Ainsi

$$\|S_n\|^{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1. \tag{3.39}$$

Les nombres $L_n := \|D_n\|_1$ sont appelées *constantes de Lebesgue.*

Exercice 3.65. Montrer que $L_n = \dfrac{4}{\pi^2} \log n + O(1)$.

Quand $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{T})$, (3.39) est une égalité. En effet, on a vu que $\|F_m\|_1 = 1$ (cf lemme 3.9 et définition 3.7). Donc, $\|S_n\|^{L^1} \geq \|S_n(F_m)\|_1 = \|D_n * F_m\|_1 = \|F_m * D_n\|_1 = \left\| D_n - \dfrac{1}{m+1} g_n \right\|_1$ si $m \geq n$. Donc, par (3.39), $\|S_n\|^{L^1} = \|D_n\|_1$.
Ainsi $L^1(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété de convergence en norme.

Exercice 3.66. Montrer que $\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$.
Indication : pour cela, on pourra étudier $S_n(\psi_n)$ où ψ_n est une fonction continue bornée en module par 1 qui prend comme valeur en t le signe de $D_n(t)$ sauf en des voisinages assez petits des points où celui-ci change.

3.2.2 Relation avec l'existence d'une fonction conjuguée

On va maintenant relier la propriété de convergence en norme à l'existence d'une fonction conjuguée.
Dans la définition 3.6, on a appelé série trigonométrique conjuguée de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\text{sgn}(n) a_n e^{int}$.
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que la série conjuguée de $\sum \hat{f}(n) e^{int}$ est la série de Fourier d'une fonction g, on dit que g est la conjuguée de f ; on la note $\tilde{f}$. Ceci ne définit a priori pas la fonction conjuguée pour toute fonction intégrable ; on verra une généralisation au chapitre suivant.

Définition 3.67. Un espace de fonction $\mathcal{B} \subset L^1(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison si, pour $f \in \mathcal{B}$, $\tilde{f}$ est définie et appartient à $\mathcal{B}$.

Lemme 3.68. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène stable par conjugaison. Alors $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $\mathcal{B}$.*

Démonstration. La linéarité vient clairement de la définition de la série conjuguée. Le fait que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée suit du

Théorème 3.69 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire. T est bornée si et seulement si $Gr(T) := \{(f, Tf);\ f \in \mathcal{B}\}$, le graphe de T, est fermé dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Il suffit de montrer que $\{(f, \tilde{f});\ f \in \mathcal{B}\}$ est fermé. Soit (f, g) dans l'adhérence de $\text{Gr}(T)$. Il existe donc $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \to f$ et $\tilde{f}_n \to g$. Alors par continuité, pour tout entier m, $\hat{f}_n(m) \underset{n\to+\infty}{\to} \hat{f}(m)$. D'autre part,

$$\hat{g}(m) = \lim_{n\to+\infty} \hat{\tilde{f}}_n(m) = \lim_{n\to+\infty} -i\,\text{sgn}(m)\hat{f}_n(m) = -i\,\text{sgn}(m) \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(m) = -i\,\text{sgn}(m)\hat{f}(m) = \hat{\tilde{f}}(m).$$

Ainsi par le théorème 3.10, $g = \tilde{f}$ c'est-à-dire que $(f, g) \in\text{Gr}(T)$. $\square$

Preuve du Théorème du graphe fermé. Supposons T borné. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ est telle que $(u_n, Tu_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (u, v)$ dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Alors

$$\|Tu - v\| \leq \lim_{n\to+\infty} (\|Tu - Tu_n\| + \|v - Tu_n\|) = 0$$

Donc $(u, v) \in$Gr(T). Ainsi le graphe de T est fermé.
Réciproquement, supposons que le graphe de T est fermé. Alors Gr(T) est un espace de Banach muni de la norme de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Pour $n > 0$, on pose $F_n := \{(u, Tu);\ \|Tu\|_{\mathcal{B}} \leq n\}$. Les $(F_n)_{n\geq 1}$ sont fermés dans Gr(T) et $\cup_n F_n =$Gr(T). Par le lemme de Baire (cf Th. 1.2.3, polycopié JY. Chemin 4M005), il existe $n > 1$ tel que F_n est d'intérieur non vide. Comme $F_n = -F_n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|u\| \leq \varepsilon$, on a $\|Tu\|_{\mathcal{B}} \leq 2n$. Ainsi si $u \neq 0$, en posant $v = \varepsilon u/(2\|u\|_{\mathcal{B}})$, on a $\|Tu\|_{\mathcal{B}} = \|Tv\|_{\mathcal{B}}(2\|u\|_{\mathcal{B}}/\varepsilon) \leq (2n/\varepsilon)\|u\|_{\mathcal{B}}$.
Ainsi T est borné et la preuve du théorème 3.69 complète. □

Théorème 3.70. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène tel que pour $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{int} f \in \mathcal{B}$ et*

$$\|e^{int} f\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.40}$$

Alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison si et seulement si il admet la convergence en norme.

Démonstration. Considérons l'application

$$f \mapsto f^\flat = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}. \tag{3.41}$$

Si $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison, alors cette application est linéaire bornée de $\mathcal{B}$ dans lui-même.
Réciproquement, si cette application est bien définie (i.e. pour tout $f \in \mathcal{B}$, la série trigonométrique du membre de droite de (3.41) est la série de Fourier d'un élément de $\mathcal{B}$), alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison.
Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\sup_n \|S_n\|^{\mathcal{B}} = K < +\infty$. On définit alors

$$S_n^\flat(f) = \sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j) e^{ijt} = e^{int} S_n(e^{-int} f). \tag{3.42}$$

Par (3.40), on a $\sup_n \|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = K$.
Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2K$. Alors

$$\|S_n^\flat(f) - S_n^\flat(P)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2.$$

Notons que si n et m sont supérieurs au degré de P alors $S_n^\flat(P) = S_m^\flat(P)$. Ainsi

$$\|S_n^\flat(f) - S_m^\flat(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon.$$

Donc $(S_n^\flat(f))_n$ est de Cauchy et converge dans $\mathcal{B}$ vers $f^\flat \in \mathcal{B}$. On voit que $f^\flat \sim \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) e^{int}$.

Réciproquement, si l'application $f \mapsto f^\flat$ est bien définie et donc bornée par, disons, K_1 (par le raisonnement menant au lemme 3.68), on voit que

$$S_n^\flat(f) = f^\flat - e^{i(2n+1)\cdot} \left(e^{-i(2n+1)\cdot} f\right)^\flat$$

et, donc, que $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} \leq 2K_1$. Or par (3.40) et (3.42), on a $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = \|S_n\|^{\mathcal{B}}$ ce qui achève la preuve du théorème 3.70. □

Dans le chapitre suivant, nous étudierons la conjugaison plus en détails et prouverons que, pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison et, donc, le

Théorème 3.71. *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ a la propriété de convergence en norme.*

3.2.3 Convergence et divergence en un point

Théorème 3.72. *Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point.*

Première preuve. Les formes $f \mapsto [S_n(f)](0)$ sont continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2 poly JY. Chemin 4M005), si $((S_n(f)](0))_n$ est bornée pour toute f, ces formes sont uniformément bornées. On a déjà vu que ceci ne se peut (i.e. (3.38) n'est pas vrai pour $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Il existe donc f que $((S_n(f)](0))_n$ n'est pas bornée et, donc la série de Fourier de f diverge en 0. $\square$

Seconde preuve du théorème 3.72. On va maintenant donner une preuve plus constructive. Dans l'exercice 3.66, on construit une suite de fonctions, disons, $(\psi_n)_n$ continues sur $\mathbb{T}$ telles que, pour n assez grand,

$$\|\psi_n\|_\infty \le 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\psi_n, 0)| \ge \frac{1}{2} L_n \ge \frac{1}{10}\log n \tag{3.43}$$

Posons $\varphi_n = F_{n^2} * \psi_n$; ce sont des polynômes trigonométriques de degré au plus n^2 vérifiant

$$\|\varphi_n\|_\infty \le 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| \le \frac{6}{5}. \tag{3.44}$$

En effet, $S_n(\varphi_n) - S_n(\psi_n) = (F_{n^2} * D_n - D_n) * \varphi_n$ et

$$\|F_{n^2}*D_n - D_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} (D_j - D_n) \right\|_\infty \le \frac{1}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} \|D_j - D_n\|_\infty \le \frac{2}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) = \frac{n(n+1)}{n^2+1} \le \frac{6}{5}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$|S_n(\varphi_n, 0)| \ge \frac{1}{10}\log n - \frac{6}{5}. \tag{3.45}$$

Pour $\lambda_n := 2^{3^n}$, on pose

$$f(t) = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t). \tag{3.46}$$

Par (3.44), cette somme converge normalement dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et définit donc une fonction continue. Montrons que sa série de Fourier diverge en 0. En remarquant que $\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m) e^{i\lambda_n m t}$, on voit que la croissance rapide de $(\lambda_n)_n$ garantit que, si $m < n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)) = \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)$ et si $m > n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)) = \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)$. On calcule donc

$$\begin{aligned} |S_{\lambda_n^2}(f,0)| &= \left| S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot), 0 \right) + \sum_{m\ge n+1} \frac{1}{m^2} \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^2} \varphi_{\lambda_m}(0) + \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{m\ge n+1} \frac{1}{m^2} \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0) \right| \ge \frac{1}{10n^2}\log\lambda_n - \frac{\pi^2}{6} - \frac{6}{5}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ par construction de $(\lambda_n)_n$.
Ceci achève la seconde preuve du théorème 3.72. $\square$

On va maintenant donner quelques critères de convergence ponctuelle.

Théorème 3.73. *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty. \tag{3.48}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $S_n(f)(t)$ et $F_n * f(t)$ ont le même type de convergence, et quand elles existent, leurs limites sont égale. De plus, si $F_n * f(t)$ converge uniformément sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ alors il en est de même pour $S_n(f)(t)$.

Démonstration. Comme $F_n * f(t)$ est une moyenne de Cesaro de $(S_m(f)(t))_{0\leq m\leq n}$, il est clair que la convergence de $(S_n(f)(t))_n$ implique celle de $(F_n * f(t))_n$. Pour la réciproque, on choisit $\lambda > 1$ et, en utilisant (3.4), on calcule

$$S_n(f)(t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}F_{[\lambda n]} * f(t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}F_n * f(t) - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\left(1-\frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt} \tag{3.49}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière de $\cdot$.
La propriété (3.48) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n\leq|m|\leq\lambda n} |\hat{f}(m)| < \varepsilon$. Pour ce choix de λ, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\left(1-\frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt}\right| = \sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\frac{[\lambda n]-m}{[\lambda n]-n}\hat{f}(m)e^{imt}\right| \leq \varepsilon. \tag{3.50}$$

Ainsi, si $(F_n * f(t))_n$ converge vers a, (3.49) donne

$$|S_n(f)(t) - a| \leq \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}|F_{[\lambda n]} * f(t) - a| + \frac{n+1}{[\lambda n]-n}|F_n * f(t) - a| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

si on choisit n assez grand.
Ceci prouve le premier point du théorème 3.73. L'uniformité suit de l'uniformité en t dans la borne (3.50). □

Corollaire 3.74. *Si f est de variations bornées (voir section 2.3.3), alors, en tout point t, $S_n(f)(t)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ et vers $f(t)$ aux points de continuité. La convergence est uniforme sur les intervalles compacts sur lesquels f est continue.*

Démonstration. Le théorème 3.34 nous dit que les coefficients de Fourier de f à variation bornée vérifient (3.48). Le théorème de Fejér, i.e. le théorème 3.22, nous permet alors de conclure en utilisant l'exercice 2.57. □

Lemme 3.75. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $t \mapsto f(t)/t$ est aussi intégrable sur $\mathbb{T}$. Alors $S_n(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Par (3.36), en utilisant la formule d'addition du sinus, on calcule

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)\cos(nt)dt. \tag{3.51}$$

Comme, par hypothèse, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{T}$, le résultat du lemme suit directement du lemme de Riemann-Lebesgue. □

Théorème 3.76 (Principe de localisation)**.** *Soit $f \in L^1(T)$ qui s'annule dans un intervalle ouvert I. Alors $S_n(f)(t)$ converge vers 0 pour $t \in I$ et, cette convergence est uniforme sur les compacts de I.*

Démonstration. La convergence vers 0 est un conséquence immédiate du lemme 3.75. Pour $\tau \in \mathbb{T}$, on a

$$S_n(f)(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(t+\tau)\cos(t/2)}{\sin(t/2)} \sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t+\tau)\cos(nt))dt.$$

Les applications $t \in \mathbb{T} \mapsto f(\cdot+\tau) \in L^1(\mathbb{T})$ et $t \in I \mapsto \dfrac{f(\cdot+\tau)\cos(\cdot/2)}{\sin(\cdot/2)} \in L^1(\mathbb{T})$ sont continues par l'hypothèse faite sur f et I (et par le corollaire 1.69). Si $K \subset I$ est compact, alors les images de K par ces applications sont des compacts de $L^1(\mathbb{T})$ auxquels on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme, lemme 3.12 ce qui donne la convergence uniforme annoncée. □

Une autre conséquence immédiate du lemme 3.75 est le

Théorème 3.77 (Critère de Dini)**.** *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$. Si $t \mapsto \dfrac{f(t+t_0)-f(t_0)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $S_n(f)(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t_0)$.*

3.3 Fonctions harmoniques

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$.

Définition 3.78. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $u \in \mathcal{C}(U)$ est *harmonique sur* U si en tout point de D, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent et vérifient $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Pour qu'une fonction soit harmonique, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire le soient.

Remarque 3.79. On rappelle que si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable i.e. pour $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + o(z-z_0)$ au voisinage de z_0) alors elle est indéfiniment différentiable en (x, y). La fonction f vérifie alors dans U l'équation de Cauchy-Riemann

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.52}$$

De plus, si on note $\partial f := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, alors $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.
Réciproquement, si f est continue et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur U alors elle est holomorphe dans U.
Rappelons, enfin, que f est holomorphe dans U si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de chaque point de U.
On calcule

$$4\overline{\partial}\partial f = 4\partial\overline{\partial} f = \Delta f. \tag{3.53}$$

Ainsi une fonction holomorphe dans U est harmonique dans U.

L'égalité (3.53) implique que la partie réelle (ainsi que la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. On verra un peu plus loin que ce résultat admet une réciproque.

3.3.1 Le noyau de Poisson

Pour $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{T}$, le noyau de Poisson est la fonction

$$P(r,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ijt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right). \tag{3.54}$$

On vérifie facilement que

1. $P(r,t) > 0$,
2. $P(r,-t) = P(r,t)$,
3. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1$,
4. pour $0 < \delta < |t| \leq \pi$, on a $P(r,t) \leq P(r,\delta)$,
5. $P(r,\delta) \to 0$ quand $r \to 1^-$ (avec $0 < \delta \leq \pi$)

Ainsi, si $(r_n)_n$ est une suite positive telle que $r_n \to 1^-$ la suite $(t \mapsto P(r_n,t))_n$ est une approximation de l'identité (voir la définition 3.7).
On note $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, le disque unité ouvert, et $\overline{D}$ sa clôture, le disque unité fermé. En posant $z = re^{it} \in D$, on calcule

$$P(r,t-\tau) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\tau}-z|^2}. \tag{3.55}$$

3.3.2 L'intégrale de Poisson

En posant $z = e^{it}$, on identifie $\mathbb{T}$ avec le cercle unité $\{z;\ |z| = 1\}$ du plan complexe. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $f(re^{it})$, $r < 1$, son intégrale de Poisson (voir la remarque 3.21),

$$f\left(re^{it}\right) := P(r,\cdot) * f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n). \tag{3.56}$$

On va considérer cette fonction comme une fonction de la variable complexe $z = re^{it}$ dans D.
Si f est à valeurs réelles, alors

$$f(z) = f\left(re^{it}\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau\right]. \tag{3.57}$$

Par le théorème d'holomorphie sous le signe somme, la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau$$

est holomorphe dans D. Ainsi $z \mapsto f(re^{it})$ est harmonique dans D si f est à valeurs réelles. Ceci reste vrai pour f intégrable sur $\mathbb{T}$ en la décomposant comme la somme de ses parties réelle et imaginaire. On a donc démontré

Proposition 3.80. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale de Poisson $f(re^{it})$ est une fonction harmonique dans D.*

On a

Théorème 3.81. *Soit u une fonction continue à valeurs réelles sur $\overline{D}$ harmonique dans D. Alors, dans D, u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à $\mathbb{T}$ et elle est la partie réelle de la fonction holomorphe*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} u(e^{i\tau})d\tau, \quad z \in D. \tag{3.58}$$

Démonstration. Par le théorème d'holomorphie sous le signe somme, la fonction f définie par (3.58) est holomorphe dans D. Il nous suffit de montrer que $u = u_1$ où $u_1 = \mathrm{Re}\, f$.
Montrons d'abord que u_1 se prolonge continûment sur $\overline{D}$ et que $(u_1)_{|\mathbb{T}} = u_{|\mathbb{T}}$. Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} u(e^{i\tau})d\tau = u(e^{it}). \tag{3.59}$$

En utilisant les propriétés de $P(r,t)$ (voir les points 1-5 dans la section 3.3.1), pour δ positif petit arbitraire, on calcule

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} u(e^{i\tau})d\tau - u(e^{it})\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} \left(u(e^{i\tau})-u(e^{it})\right)d\tau\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t-\tau)\left|u(e^{i\tau})-u(e^{it})\right| d\tau \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{|t-\tau|\le\delta}|u(e^{i\tau})-u(e^{it})| + 2\sup_{t\in\mathbb{T}}|u(e^{it})| \sup_{\substack{|t|\ge\delta \\ t\in\mathbb{T}}} P(r,t).\end{aligned}$$

La continuité uniforme de u sur $\overline{D}$ nous permet de conclure (3.59).
Posons $h = u - u_1$. Alors h est continue sur $\overline{D}$, harmonique dans D et nulle sur $\mathbb{T}$. Supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $h(z_0) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < h(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = h(z)+\varepsilon|z|^2$. Alors $g(z_0) \ge h(z_0) > \varepsilon$ or $g_{|T} = \varepsilon$. Don il existe un point $z_1 \in D$ où g admet un maximum local. Ainsi en ce point $\partial_x^2 g \le 0$ et $\partial_y^2 g \le 0$. Mais le calcul direct montre que $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ (comme $\Delta h = 0$).
Ainsi $h = u - u_1 \le 0$. Le même argument montre que $u_1 - u \le 0$ c'est-à-dire que $u = u_1$. Ceci achève la preuve du théorème 3.81. □

Le théorème 3.81 montre que, si u est harmonique dans D, il existe f holomorphe dans D tel que $u = \mathrm{Re}\, f$. En effet, u est continue dans D ; pour $0 < r < 1$, on peut donc appliquer le théorème précédent à la fonction $z \mapsto u(rz)$ ce qui définit une fonction $z \mapsto f_r(rz)$ holomorphe sur D. Ainsi $u(z) = \mathrm{Re}\, f_r(z)$ sur rD. Si $0 < r < r' < 1$, on a $\mathrm{Re}\,(f_r - f_{r'})(z) = 0$ sur rD. Donc, $f_r - f_{r'}$ est une fonction holomorphe à valeurs purement imaginaires sur rD ; elle est donc constante et cette constante peut être choisie nulle. Ainsi $f_{r'}$ est un prolongement holomorphe de f_r à $r'D$. On construit ainsi une fonction holomorphe sur $D = \bigcup_{0<r<1} rD$ telle que $u = \mathrm{Re}\, f$. On peut étendre ce résultat à un ouvert connexe.

Théorème 3.82. *Soit U un ouvert et $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique. Alors il existe $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $u = \mathrm{Re}\, f$. De plus, si U est connexe, pour $z_0 \in U$, f est définie de façon unique par la valeur $f(z_0)$.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, le raisonnement fait ci-dessus construit une fonction, disons, f_{z_0,r_0} holomorphe sur $z_0 + r_0 D$ telle que $u_{|z_0+r_0D} = \mathrm{Re}\, f_{z_0,r_0}$. Si $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D \neq \emptyset$, on peut, quitte à les modifier par une constante imaginaire pure, garantir que $f_{z_0,r_0} = f_{z_0',r_0'}$ sur $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D$. La collection de fonctions $(f_{z_0,r_0})_{z_0+r_0\overline{D}\subset U}$ définit alors une fonction holomorphe sur U telle que $u = \mathrm{Re}\, f$.
Supposons U est connexe et f et $\tilde{f}$ telles que $u = \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\, \tilde{f}$. Alors, pour $c \in \mathbb{R}$, $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\}$ est fermé car $f - \tilde{f}$ est continue et ouvert car $f - \tilde{f}$ est holomorphe. Donc, comme U est connexe, $\{z \in$

$U;\ f(z)-\tilde{f}(z)=c\}=\emptyset$ ou $\{z\in U;\ f(z)-\tilde{f}(z)=c\}=U$. Ainsi si f et $\tilde{f}$ prennent la même valeur en un point, elles sont égales sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.82. $\square$

Corollaire 3.83. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe de V dans U et que g est harmonique de U dans $\mathbb{C}$ alors $g\circ f$ est harmonique sur V.*

Démonstration. En décomposant g en partie réelle et imaginaire, il suffit de prouver le corollaire pour g à valeurs réelles. On écrit alors $g=\mathrm{Re}G$ où G est holomorphe sur U. Donc $g\circ f=\mathrm{Re}(G\circ f)$ et $G\circ f$ est holomorphe sur V. La conclusion du corollaire suit. $\square$

Exercice 3.84. Démontrer le corollaire en calculant directement $\Delta(g\circ f)$.

Définition 3.85. Soient $u:U\to\mathbb{R}$ harmonique et $v:\ U\to\mathbb{R}$. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u (sur U) si est seulement si $u+iv$ est holomorphe sur U.

Le théorème 3.82 garantit l'existence d'une conjuguée harmonique. Si U est connexe, elle unique à une constante réelle près.

Remarque 3.86. Dans D, la conjuguée harmonique de (3.56) est la fonction

$$\tilde{f}(re^{it})=-i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sign}n\, r^{|n|}e^{int}\hat{f}(n)=Q(r,\cdot)*f(t) \tag{3.60}$$

où l'on a posé

$$Q(r,t)=-i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sign}n\, r^{|n|}e^{int}=\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}. \tag{3.61}$$

Q est la conjuguée harmonique du noyau de Poisson P (normalisé de façon que $Q(0,t)=0$).

Du théorème 3.82 et de la remarque 3.79, on déduit immédiatement le

Corollaire 3.87. *Une fonction harmonique est indéfiniment différentiable.*

3.3.3 La propriété de la moyenne et le principe du maximum

Théorème 3.88. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*
Une fonction $u:\ U\to\mathbb{C}$ continue est harmonique sur U si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne en tout point de U i.e. $\forall z_0\in U$, $\forall r>0$ tels que $z_0+r\overline{D}\subset U$, on a

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{it})dt. \tag{3.62}$$

Démonstration. Supposons u harmonique dans U. Sans perte de généralité, on peut supposer que u est à valeurs réelles. Soient $z_0\in U$ et $r_0>0$ tels que $z_0+r_0\overline{D}\subset U$. La formule de Poisson pour u dans $z_0+r_0\overline{D}$ s'écrit alors, pour $0<r<r_0$ et $z\in D$,

$$u\left(z_0+r_0z\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}f(z_0+r_0e^{i\tau})d\tau\right].$$

soit encore en écrivant $z=r\,r_0^{-1}\,e^{it}$ pour $0\le r<r_0$,

$$u\left(z_0+re^{it}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r\,r_0\cos(t-\tau)+r^2}f(z_0+r_0e^{i\tau})d\tau. \tag{3.63}$$

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.