Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

7 mars 2019

En prenant $r = 0$, on obtient (3.62).
Réciproquement, soit u continue sur U et y vérifiant la propriété de la moyenne. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson construit une fonction harmonique à valeurs réelles, disons, $\tilde{u}$ qui coïncide avec u sur le cercle $z_0 + r_0\mathbb{T}$. Soit $v = u - \tilde{u}$. La fonction v vérifie la propriété de la moyenne. Supposons $m := \max\limits_{z_0+r_0\overline{D}} v(z) > 0$. v étant continue et $z_0 + r_0\overline{D}$ compact, ce maximum existe et est atteint. Comme il est strictement positif, il est atteint dans $z_0 + r_0D$. Soit $\tilde{z}_0$ un tel maximum. Soit $\tilde{r}_0$ tel que $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D} \subset z_0 + r_0D$. Par la formule de la moyenne, pour $0 < r < \tilde{r}_0$, on a

$$m = v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v(\tilde{z}_0 + re^{it})dt \leq m. \tag{3.64}$$

Or v est majorée par m dans $z_0 + r_0\overline{D}$. Comme v est continue, elle est constante égale à m sur $\tilde{z}_0 + r\mathbb{T}$ pour $0 < r < \tilde{r}_0$, c'est-à-dire, sur le disque $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D}$. On voit ainsi que l'ensemble $\{z \in z_0 + r_0\overline{D};\ v(z) = m\}$ est ouvert ; il est clairement fermé ; ainsi, comme $z_0 + r_0\overline{D}$ est connexe, v est constante sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Or, sur le bord $z_0 + r_0\mathbb{T}$, elle est nulle ; ainsi $m \leq 0$. Comme on peut appliquer le même raisonnement à $-v$, on obtient v est identiquement nulle et que u et $\tilde{u}$ coïncident sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Enfin, comme z_0 et r_0 sont arbitraires tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, on obtient que $u = \tilde{u}$ sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.88. $\square$

Remarque 3.89. En intégrant (3.62) par rapport au rayon du cercle, on voit que si u vérifie la propriété de la moyenne (3.62) sur U, elle vérifie aussi

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{z_0+r\overline{D}} u(z)dxdy \tag{3.65}$$

si $z_0 + r\overline{D} \subset U$.

Une autre propriété importante des fonctions harmoniques est

Théorème 3.90 (Le principe du maximum)**.** *Soit U un ouvert connexe borné et $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique dans U. Alors $\max\limits_{\overline{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$ et s'il existe $x_0 \in U$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.*

Démonstration. Comme u est continue sur $\overline{U}$ compact, il existe $x_0 \in \overline{U}$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$. En prenant $v = u$ dans la preuve du théorème 3.88, on obtient immédiatement l'énoncé du théorème 3.90. $\square$

Une conséquence de la formule de la moyenne est le

Théorème 3.91 (Théorème de Harnack)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe U.*

1. *Si $u_n \to u$ localement uniformément dans U (i.e. uniformément sur tout compact de U) alors u est harmonique sur U.*
2. *Si $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ alors soit $(u_n)_n$ converge localement uniformément dans U soit elle diverge vers $+\infty$ sur tout U.*

Démonstration. Démontrons 1. Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout compact de U, u est continue et elle vérifie la propriété de la moyenne (comme conséquence du théorème de convergence dominée et car tous les $(u_n)_n$ la vérifie). Donc u est harmonique.

Démontrons 2. Quitte à soustraire u_1 à tous les éléments de la suite, on peut supposer $u_1 \geq 0$. Posons $u = \sup u_n$. Soit $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Alors, pour $0 \leq r \leq r_0$, le noyau de Poisson satisfait à

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} \leq \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r\, r_0 \cos(t-\tau) + r^2} \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}.$$

Ainsi, par la formule de Poisson (3.63), pour tout n, on obtient

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + re^{it}) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r} u_n(z_0) \quad \textit{(Inégalité de Harnack)}. \tag{3.66}$$

La même inégalité reste donc vraie pour u. On en déduit que soit $u(z) = +\infty$ sur tout $z_0 + r_0 D$ soit $u(z) < +\infty$ (et donc $(u_n)_n$ converge) sur tout $z_0 + r_0 D$ Si m est le supremum de u dans $z_0 + r_0\overline{D}$, l'inégalité (3.64) pour $v = u$ reste vraie. Donc l'ensemble des points z où u est fini (c'est-à-dire où $(u_n)_n$ converge) est ouvert et fermé dans U connexe ; il est donc vide ou égal à U tout entier. S'il est U tout entier, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la formule de Poisson pour les $(u_n)_n$ ce qui nous dit que u vérifie la formule de Poisson dans U et ainsi est harmonique dans U. L'uniformité de la convergence sur tout compact provient par exemple de (3.66) appliqué à $u - u_n$ qui donne, pour $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$,

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r}(u - u_n)(z_0) \leq \sup_{z \in z_0 + r_0\overline{D}} (u - u_n)(z) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}(u - u_n)(z_0).$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.91. □

3.4 La fonction conjuguée

Nous allons maintenant étudier la fonction conjuguée d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

3.4.1 Définition

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. À f, par la formule de Poisson (3.56), on peut associer une fonction harmonique dans D que l'on notera aussi f. Le théorème de Fatou (théorème 3.28) et la remarque qui le suit nous disent qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{it})$.

Exercice 3.92. Montrer qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(z) \to f(e^{it})$ quand $z \to e^{it}$, $|z| < 1$ non tangentiellement (i.e. si z reste dans un secteur de la forme $\{z \in D;\ |\arg(1 - ze^{-it})| \leq \alpha\}$ (où $0 < \alpha < \pi$ est arbitraire).

La conjuguée harmonique de f (normalisée par la valeur 0 au point 0) est alors définie par (3.60) ; on la note $\tilde{f}(re^{it})$ $(0 \leq r < 1,\ t \in \mathbb{T})$. On va montrer que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, cette fonction harmonique admet une limite radiale en e^{it} i.e. la limite $\lim_{r \to 1^-} \tilde{f}(re^{it})$ existe.

Lemme 3.93. *Toute fonction harmonique bornée sur D est la transformée de Poisson d'une fonction bornée sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit F harmonique et bornée sur D. Soit $(r_n)_n$ une suite positive telle que $r_n \to 1^-$. Posons $f_n(e^{it}) = F(r_n e^{it})$. La suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Comme $L^\infty(\mathbb{T})$ est le dual de $L^1(\mathbb{T})$, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ qui converge faiblement (i.e. pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, $(\langle f_{n_j}, g\rangle)_{j \geq 1}$ converge) vers, disons, $F(e^{it})$. Soit $\rho e^{i\tau} \in D$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(e^{it}t)P(\rho, \tau - t)dt = \langle F, P(\rho, \tau - \cdot)\rangle = \lim_{j \to +\infty} \langle f_{n_j}, P(\rho, \tau - \cdot)\rangle \\ = \lim_{j \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{n_j}(e^{it})P(\rho, \tau - t)dt = \lim_{j \to +\infty} F(r_{n_j}\rho e^{it}) = F(\rho e^{it}).\end{aligned}$$

Ainsi $F(re^{it})$ est bien la transformée de Poisson de F ce qui prouve le lemme 3.93. $\square$

Lemme 3.94. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\tilde{f}(re^{it})$ définie par (3.60). Alors, pour presque tout t, $\tilde{f}(re^{it})$ a une limite quand $r \to 1^-$.*

Démonstration. On peut décomposer $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_j)_{1\leq j\leq 4}$ sont intégrables et positives. Par linéarité de l'application $f \mapsto \tilde{f}(re^{it})$ on peut supposer que f est positive.
Par définition de la conjuguée harmonique, la fonction $F(z) := e^{-f(z)-i\tilde{f}(z)}$ est holomorphe (donc aussi harmonique) dans D. L'intégrale de Poisson d'une fonction positive est positive ; la conjuguée harmonique d'une fonction à valeurs réelles est à valeurs réelles. Ainsi $|F(z)| \leq 1$ dans D. Par le lemme 3.93 (et le théorème 3.28), F admet une limite radiale de module $e^{-f(e^{it})}$ presque partout. Cette limite est non nulle presque partout car f est intégrable. Et en chaque point où cette limite est non nulle, comme F admet une limite radiale, la fonction $\tilde{f}(re^{it})$ admet une limite radiale. Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

Définition 3.95. La *fonction conjuguée* d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$ est la limite radiale de $\tilde{f}(re^{it})$.

Remarque 3.96. On notera que la fonction conjuguée d'une fonction à valeurs réelles est elle auss i à valeurs réelles (voir la preuve du Lemme 3.94).

Si la série conjuguée de la série de Fourier de f intégrable est la série de Fourier d'une fonction g intégrable, alors, clairement, l'intégrale de Poisson de g est $\tilde{f}(re^{it})$ qui converge radialement vers $g(e^{it})$ presque partout (théorème 3.28). On a alors que $\tilde{f} = g$; ainsi, la définition 3.95 généralise la définition donnée dans la section 3.2.2.
À la suite du théorème 3.30 et du corollaire 3.31, nous avons vu que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ est une série de Fourier alors que sa série conjuguée $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'en est pas une. Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ converge en tout point (par le critère des séries alternées), sa somme est la fonction conjuguée de $f = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ et on peut vérifier que $t \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas intégrable. Il existe donc des fonctions intégrables dont la fonction conjuguée n'est pas intégrable.

Remarque 3.97. Le fait que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas une série de Fourier ne suffit pas à démontrer qu'elle ne définit pas une fonction intégrable. Néanmoins on montrera plus loin que si f et $\tilde{f}$ sont intégrables, alors $\tilde{f}(re^{it})$ est l'intégrale de Poisson de $\tilde{f}$. Ceci permet alors de démontrer que si $\tilde{f}$ est intégrable alors sa série de Fourier est la série conjuguée de celle de f ; ainsi si cette série n'est pas une série de Fourier alors $\tilde{f}$ ne peut être intégrable.
Ce qui nous fait défaut ici est que nous n'avons que la convergence radiale ponctuelle (presque partout) ; nous ne pouvons donc pas contrôler la convergence d'intégrales de telles fonctions.

3.4.2 Fonction de répartition

La mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbb{T}$ est notée $|E|$.

Définition 3.98. La fonction de répartition d'une fonction sur $\mathbb{T}$ mesurable à valeurs réelles est la fonction

$$m(x) = m_f(x) = |\{t \in \mathbb{T};\ f(t) \leq x\}|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions de répartitions sont croissantes et continues à droite ; elles tendent vers 0 en $-\infty$ et vers 2π en $+\infty$. On peut donc associer à m_f sa mesure de Stieltjes-Lebesgue notée dm_f (voir l'exercice 2.57). C'est une mesure de Borel positive (car m_f croît) de masse totale 2π. dm_f est la mesure image par f de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

Lemme 3.99. *Pour $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée ou continue positive, on a*

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x). \tag{3.67}$$

Démonstration. Si F est une fonction en escalier i.e. $F = \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbf{1}_{]a_k,a_{k+1}]}$, (3.67) est clairement vrai par la définition de m_f : en effet,

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \sum_{k=1}^{n} f_k \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{]a_k,a_{k+1}]}(f(t))dt = \sum_{k=1}^{n} f_k[m_f(a_{k+1}) - m_f(a_k)] = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x). \tag{3.68}$$

Supposons maintenant que F est continue bornée (non identiquement nulle). Les deux intégrales dans (3.67) sont bien définies. Pour $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $X_\varepsilon > 0$ tel que $m_f(-X_\varepsilon) + (2\pi - m_f(X_\varepsilon)) \leq \varepsilon/(4\|F\|)$. Ainsi on a

$$\int_{\mathbb{T}} |F(f(t))| \left(\mathbf{1}_{f(t)\leq -X_\varepsilon} + \mathbf{1}_{f(t)>X_\varepsilon}\right) dt + \left(\int_{]-\infty,-X_\varepsilon]} + \int_{]X_\varepsilon,+\infty[}\right) |F(x)|dm_f(x) \leq \varepsilon/2. \tag{3.69}$$

D'autre part, on construit F_ε en escalier nulle hors de $]-X_\varepsilon, X_\varepsilon]$ telle que $\sup_{-X_\varepsilon<t\leq X_\varepsilon} |F(t) - F_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/8\pi$. Ainsi, par (3.68) et (3.69), on calcule

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt - \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x)\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_{\mathbb{T}} F_\varepsilon(f(t))dt - \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(x)dm_f(x)\right| + \int_{\mathbb{T}} |\mathbf{1}_{]-X_\varepsilon,X_\varepsilon]}(F - F_\varepsilon)|(f(t))dt \\
&\qquad\qquad + \int_{]-X_\varepsilon,X_\varepsilon]} |F - F_\varepsilon(x)|dm_f(x) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient (3.67) quand F est continue bornée.
Supposons F est continue positive. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction

$$x \mapsto F_n(x) = F(x)\left[\mathbf{1}_{]-n,n[} + \mathbf{1}_{[-n-1,-n]}(x+n+1) + \mathbf{1}_{[n,n+1]}(n+1-x)\right].$$

La suite $(F_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives continues bornées qui converge ponctuellement vers F. Par le théorème de convergence monotone et ce qui vient d'être montré pour les fonctions continues bornées, on sait que

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} F_n(f(t))dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n(x)dm_f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.99. □

Définition 3.100. Pour $0 < p < +\infty$, on dit qu'une fonction mesurable f est *de type L^p faible* s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$

$$|\{t \in \mathbb{T};\ |f(x)| > \lambda\}| = 2\pi - m_{|f|}(\lambda) \leq C\lambda^{-p}. \tag{3.70}$$

Toute fonction dans $L^p(\mathbb{T})$ est de type L^p faible. En effet, par le lemme 3.99, pour $\lambda > 0$, on a

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} x^p\, dm_{|f|}(x) \geq \frac{1}{2\pi}\int_\lambda^{+\infty} x^p\, dm_{|f|}(x) \geq \frac{\lambda^p}{2\pi}\int_\lambda^{+\infty} dm_{|f|}(x) = \frac{\lambda^p}{2\pi}(2\pi - m_{|f|}(\lambda)). \tag{3.71}$$

On voit que l'on peut prendre $C = 2\pi\|f\|_p^p$.
Il est facile de trouver des fonction de type L^p faible qui ne sont pas L^p ; $t \in \mathbb{T} \mapsto |\sin t|^{-1/p}$ est un exemple.

Lemme 3.101. *Si f est de type L^p faible alors $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ si $0 < p' < p$.*

Démonstration. En intégrant par parties et en utilisant (3.70), on calcule

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p'}^{p'} = \int_0^{+\infty} x^{p'}\, dm_{|f|}(x) \geq m_{|f|}(1) + \int_1^{+\infty} x^{p'}\, dm_{|f|}(x)\\
= m_{|f|}(1) - \Big[x^{p'}(2\pi - m_{|f|}(x))\Big]_1^{+\infty} + p'\int_1^{+\infty}(2\pi - m_{|f|}(x))x^{p'-1}dx\\
\leq 2\pi + Cp'\int_1^{+\infty} x^{p'-p-1}dx < +\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

3.4.3 L'opérateur de conjugaison

On va maintenant étudier la conjugaison en tant qu'application linéaire. On verra, en particulier, qu'elle envoie les fonctions intégrables dans celles de type intégrable et qu'elle est continue sur $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $1 < p < +\infty$ (théorème de Riesz).

Théorème 3.102. *Si f est intégrable alors $\tilde{f}$ est de type L^1 faible.*

Démonstration. Supposons que f est à valeurs positives et que $\|f\|_1 = 1$. Soit $\lambda > 1$. On veut estimer la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points t où $|\tilde{f}(t)| > \lambda$. Par la définition de $\tilde{f}(t)$ et le théorème de convergence dominée, il suffit pour cela d'estimer $|\{|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\}|$ pour $0 < r < 1$
Pour cela, on considère la fonction

$$H_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{z - i\lambda}{z + i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\frac{z - i\lambda}{z + i\lambda}.$$

Elle est harmonique et à valeurs positive dans le demi-plan $\{z;\ \operatorname{Re} z > 0\}$ (ici le logarithme est la branche principale du logarithme complexe). Ses lignes de niveau $\{z;\ H_\lambda(z) = x\}$ sont des arcs de cercle passant par les points $i\lambda$ et $-i\lambda$. La ligne de niveau $\{z;\ H_\lambda(z) = 1/2\}$ est le demi-cercle $\{\lambda e^{i\theta};\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Ainsi, si $|z| > \lambda$ on a $H_\lambda(z) > 1/2$. D'autre part, on a

$$H_\lambda(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\lambda < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

La fonction $H_\lambda(f(z) + i\tilde{f}(z))$ est une fonction harmonique (cf 3.83) bien définie dans D ; la propriété de la moyenne nous dit alors que, pour $0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it}))dt = H_\lambda(f(0)) = H_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda} \tag{3.72}$$

en se souvenant que $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(e^{it})dt = \|f\|_1 = 1$ et que $\tilde{f}(0) = 0$ par définition.

Comme $H_\lambda(f + i\tilde{f}) \geq 1/2$ si $|f + i\tilde{f}| > \lambda$, on obtient que, pour $0 \leq r < 1$,

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{t;\ |f(re^{it}) + \tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{t;\ H_\lambda(f(re^{it}) + \tilde{f}(re^{it})) > \frac{1}{2}\right\}\right|$$
$$\leq 2\int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it}))dt \leq \frac{8}{\lambda}.$$

Ainsi, par homogénéité, pour $f \geq 0$, on a

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \leq \frac{8\|f\|_1}{\lambda}.$$

Pour traiter le cas général i.e. quand f intégrable à valeurs complexes, on décompose $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_i)_{1\leq i\leq 4}$ sont mesurables positives et $f_1\,f_2 = f_3\,f_4 = 0$. Alors $\|f_i\|_1 \leq \|f\|_1$ et, par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 + i\tilde{f}_3 - i\tilde{f}_4$. Ainsi

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \leq \sum_{j=1}^{4}\left|\left\{t;\ |\tilde{f}_j(re^{it})| > \lambda/4\right\}\right|.$$

Ainsi, par homogénéité, on obtient que, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\lambda > 0$, on a

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \leq \frac{2^8\|f\|_1}{\lambda} \tag{3.73}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.102. □

On déduit un corollaire direct de ce résultat et du lemme 3.101.

Corollaire 3.103. *Si f est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout $0 < p < 1$.*

La méthode employée dans la preuve du théorème 3.102 fournit des renseignements supplémentaires si f est supposée bornée.

Théorème 3.104. *Si f est à valeurs réelles telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ alors pour $0 \leq \alpha < \pi/2$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha|\tilde{f}(e^{it})|}dt \leq \frac{2}{\cos\alpha}. \tag{3.74}$$

Démonstration. Posons $F(z) = \tilde{f}(z) - if(z)$. Comme $\cos(\alpha\, f(z)) \geq \cos(\alpha)$ et que f et $\tilde{f}$ sont à valeurs réelles, on a

$$\mathrm{Re}\left(e^{\alpha\, F(z)}\right) = e^{\alpha\tilde{f}(z)}\cos(\alpha f(z)) \geq e^{\alpha\tilde{f}(z)}\cos\alpha. \tag{3.75}$$

De plus, comme $z \in D \mapsto \mathrm{Re}\left(e^{\alpha F(re^{it})}\right)$ est harmonique et que $\tilde{f}(0) = 0$, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(e^{\alpha F(re^{it})}\right)dt = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha F(0)}\right) = \cos\left(\alpha f(0)\right) \leq 1.$$

Ainsi, par (3.75), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha\tilde{f}(re^{it})}dt \leq \frac{1}{\cos\alpha}.$$

De même on démontre

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tilde{f}(re^{it})}dt \leq \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Enfin, (3.74) est obtenue en sommant ces deux inégalités et en laissant r tendre vers 1^-. □

Corollaire 3.105. *Si $\|f\|_\infty \leq 1$ on a*

$$m_{|\tilde{f}|}(\lambda) > 2\pi \left(1 - \frac{4}{\cos\sqrt{2}} e^{-\lambda}\right). \tag{3.76}$$

Démonstration. On décompose f en partie réelle et imaginaire i.e. $f = f_r + i f_i$. Comme $\tilde{f} = \tilde{f}_r + i\tilde{f}_i$, si $|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda$ alors soit $|\tilde{f}_r(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$ soit $|\tilde{f}_i(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$. Ainsi, par (3.74) pour $\alpha = \sqrt{2}$, on obtient

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}_\bullet(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}\right\}\right| < \frac{4\pi}{\cos\sqrt{2}} e^{-\lambda} \quad \text{pour} \quad \bullet \in \{i, r\}$$

ce qui donne immédiatement (3.76). □

On va maintenant voir que la fonction de répartition de la fonction conjuguée de l'indicatrice d'un ensemble mesurable ne dépend que de la mesure (de Lebesgue) de cet ensemble et non de l'ensemble lui même.

Théorème 3.106. *Soient $0 \leq \alpha \leq \pi$ et $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de mesure 2α. Soit $\mathbf{1}_E$ sa fonction indicatrice et $\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ celle de $]-\alpha, \alpha[$. Posons $m_E := m_{\tilde{\mathbf{1}}_E}$ et $m_\alpha := m_{\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}}$. Alors $m_E = m_\alpha$.*

Démonstration. Comme elles sont de mesure totale finie, pour montrer que les mesures boréliennes dm_E et dm_α coïncident, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.77}$$

En effet, supposons (3.77). On a alors aussi pour $b \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On peut alors multiplier cette équation par $e^{-a^2\xi^2/4}$ (pour $a > 0$) et intégrer en ξ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Re}^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi\right) dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi\right) dm_\alpha(x)$$

soit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_\alpha(x).$$

Comme $a \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi}$ pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a, pour ces mêmes a et b,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_\alpha(x).$$

Soit $\varphi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. On peut alors multiplier l'équation précédente par $\varphi(b)$ et intégrer en b sur $\mathbb{R}$ pour obtenir par le théorème de Fubini et par un changement de variable, pour tout $a > 0$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x - at) dm_E(x)\right) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} \varphi(b) db\right) dm_E(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} \varphi(b) db\right) dm_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x - at) dm_\alpha(x)\right) dt.\end{aligned}$$

En laissant a tendre vers 0, comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, le théorème de convergence dominée nous dit que, pour toute φ continue à support compact, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dm_\alpha(x)$. Ainsi, par le théorème 1.34, on a $m_E = m_\alpha$.
Démontrons maintenant (3.77). Fixons $\xi \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $z \mapsto F_\xi(z) := e^{\xi(f(z)+i\tilde{f}(z))}$ analytique dans D. Pour $f = \mathbf{1}_E$, par la formule de la moyenne pour $0 < r < 1$, on a

$$2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = 2\pi F_\xi(0) = \int_{\mathbb{T}} F_\xi(re^{it})dt = \int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})}dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})}dt.$$

En laissant r tendre vers 1, on obtient

$$2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = \int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt. \tag{3.78}$$

En écrivant la même équation pour $-\xi$ et en passant au complexe conjugué, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^{-\xi} \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi e^{-\xi\alpha/\pi}. \tag{3.79}$$

De (3.78) et (3.79), on tire

$$\int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi\frac{\mathrm{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\mathrm{sh}\xi} \quad \text{et} \quad \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi\frac{\sin\frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin\xi}. \tag{3.80}$$

On peut maintenant décomposer $m_{\tilde{f}} = n_1 + n_2$ où

$$n_1(\lambda) = |E \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}| \quad \text{et} \quad n_2(\lambda) = |(\mathbb{T}\setminus E) \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}|.$$

Ainsi, (3.80) se réécrit

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}dn_1(x) = 2\pi\frac{\sin\frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin\xi} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}dn_2(x) = 2\pi\frac{\mathrm{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\mathrm{sh}\xi}. \tag{3.81}$$

Donc n_1 et n_2 sont déterminées par la seule valeur de α. Elles sont donc les mêmes pour $\tilde{f}$ et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}$. On obtient ainsi que les fonctions de répartition de $\tilde{f}$ et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}$ coïncident. En fait, on voit de plus que les fonctions de répartition de $\tilde{f}_{|E}$ et celle de $\left(\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}\right)_{|]-\alpha,\alpha[}$ coïncident également. □

Par un calcul direct, la série de Fourier de $\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin n\alpha}{\pi n}e^{int} = \frac{\alpha}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\cos nt.$$

Donc, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(re^{it}) &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\sin nt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\frac{\cos n(t-\alpha) - \cos n(t+\alpha)}{\pi n} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n e^{in(t-\alpha)} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n e^{in(t+\alpha)}\right) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{1-re^{i(t-\alpha)}}{1-re^{i(t+\alpha)}}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\log\frac{1+r^2-2r\cos(t-\alpha)}{1+r^2-2r\cos(t+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Donc, en prenant la limite quand $r \to 1^-$, on trouve

$$\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1-\cos(t-\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)}. \tag{3.82}$$

On va maintenant estimer la mesure de l'ensemble $\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})\right| > \lambda\}$. Comme $1 = \mathbf{1}_{[-\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]} + \mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ on a $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it}) = -\widetilde{\mathbf{1}_{[-\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]}}(e^{it})$. Or $|[\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]| = 2(\pi-\alpha)$. Donc, par le théorème 3.106

$$\left|\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]\alpha-\pi,\pi-\alpha[}}(e^{it})\right| > \lambda\}\right| = \left|\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})\right| > \lambda\}\right|$$

On peut donc supposer que $\alpha \in]0,\pi/2[$.
D'autre part, comme $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})$ est impaire, il suffit d'estimer $\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it}) > \lambda\}$. Pour cela, on développe $\cos(t-\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(t+\alpha) + \sin(t+\alpha)\sin(2\alpha)$ et comme $\sin 2\alpha > 0$, on calcule

$$\begin{aligned}
\left\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it}) > \lambda\right\} &= \left\{t;\ \frac{1-\cos(t-\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)} > e^{2\pi\lambda}\right\} \\
&\subset \left\{t;\ \frac{\cos 2\alpha(1-\cos(t+\alpha)) + 1 - \cos 2\alpha + \sqrt{1-\cos^2(t+\alpha)}\sin 2\alpha}{1-\cos(t+\alpha)} > e^{2\pi\lambda}\right\} \\
&\subset \left\{t;\ \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\left(\sqrt{2}\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\right) > e^{2\pi\lambda} - \cos 2\alpha\right\} \\
&\subset \left\{t;\ \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\right)^2 > \frac{1}{2}\left(e^{2\pi\lambda} + \sin^2\alpha\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it}) > \lambda\right\} &\subset \left\{t;\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{e^{2\pi\lambda}+\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \geq \sqrt{2}\mathrm{sh}(\pi\lambda)\right\} \\
&\subset \left\{t;\ |t+\alpha| < \arccos\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{sh}^2\pi\lambda}\right)\right\} \\
&\subset \left\{t;\ |t+\alpha| < \sqrt{2}\frac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}\pi\lambda}\right\}.
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer le

Corollaire 3.107. *Soit $E \subset \mathbb{T}$ de mesure 2α. Pour $\lambda > 0$, on a* $\left|\left\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_E}(e^{it})\right| > \lambda\right\}\right| < 4\sqrt{2}\frac{|\sin\alpha|}{sh\pi\lambda}$.

Revenons à $L^1(\mathbb{T})$. On définit $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ si $x > 0$ et 0 sinon.

Théorème 3.108. *Si f mesurable telle que $f\ \log^+|f| \in L^1(\mathbb{T})$ alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.*

Démonstration. On rappelle que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même et que sa norme est majorée par 1 (voir le corollaire 3.40. De (3.71) pour $p = 2$, on déduit

$$m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \geq 2\pi(1 - \|f\|_2^2\lambda^{-2}). \tag{3.83}$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $f \log^+ |f| \in L^1(\mathbb{T})$. Pour montrer que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, par le lemme 3.99, il suffit de montrer de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ soit encore que la fonction $R \mapsto \displaystyle\int_1^{R} \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ reste bornée quand $R \to +\infty$. En intégrant par parties comme dans la preuve du lemme 3.101, on obtient

$$\int_1^R \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) = \left[-\lambda \int_\lambda^{+\infty} dm_{|\tilde{f}|}(\lambda)\right]_1^R + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda \leq 2\pi + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{R\to+\infty} \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda < +\infty. \tag{3.84}$$

Pour estimer $2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)$, on décompose $f = g + h$ où $g = f\mathbf{1}_{|f|\leq\lambda}$. Par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ ce qui implique

$$\{t;\ |\tilde{f}(t)| > \lambda\} \subset \{t;\ |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\} \cup \{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}. \tag{3.85}$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$|\{t;\ |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\}| \leq 8\pi\lambda^{-2}\|g\|_2^2 = 8\pi\lambda^{-2}\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x). \tag{3.86}$$

D'autre part, (3.73) nous donne

$$|\{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq 256\lambda^{-1}\|h\|_1 = 256\lambda \int_\lambda^{+\infty} x\, dm_{|f|}(x).$$

Or pour $x \leq \lambda > 1$, on a $\sqrt{\log x} \geq \sqrt{\log \lambda}$; donc

$$|\{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq \frac{256}{\lambda\sqrt{\log\lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x). \tag{3.87}$$

Par (3.85), (3.86) et (3.87), on a

$$2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \leq 8\pi\lambda^{-2}\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x) + \frac{256}{\lambda\sqrt{\log\lambda}}\int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x).$$

Pour obtenir (3.84) et le théorème 3.108, il nous suffit donc de montrer que, quand $R \to +\infty$,

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-2}\left(\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x)\right) d\lambda + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\log\lambda}}\int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x)\right) d\lambda < +\infty \tag{3.88}$$

On sait que la mesure $dm_{|f|}$ est positive, de masse totale 2π et, par notre hypothèse, que

$$\int_1^{+\infty} x\log x\, dm_{|f|}(x) < +\infty. \tag{3.89}$$

Pour démontrer (3.88), on applique le théorème de Fubini de la façon suivante. Le domaine d'intégration de la première intégrale est le trapèze $\{(x,\lambda);\ 1 \leq \lambda \leq +\infty,\ 0 \leq x \leq \lambda\}$; en intégrant d'abord en λ, on calcule

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-2}\left(\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x)\right) d\lambda = \int_0^1 x^2\, dm_{|f|}(x) + \int_1^{+\infty} x^2x^{-1}\, dm_{|f|}(x) = 2\pi + \int_1^{+\infty} x\, dm_{|f|}(x) < +\infty$$

Le domaine d'intégration de la seconde intégrale dans (3.88) est la bande $\{(x,\lambda);\ 1 \le \lambda \le +\infty,\ \lambda \le x\}$; en intégrant d'abord en λ, on calcule

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\log \lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x) \right) d\lambda = 2\int_1^{+\infty} x \log x\, dm_{|f|}(x) < +\infty.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.108. $\square$

On peut adapter cette analyse aux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On remplacera alors la fonction de répartition que nous avons définie par une autre de ces versions $|\{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > \lambda\}|$; elle a l'avantage d'être finie pour tout $\lambda > 0$ pour une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$.
Il est utile de définir une discrétisation de la fonction de répartition.

Définition 3.109. Soit $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espace mesuré. Pour f mesurable sur X et $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$m_n = m_n(f) = \lambda(\{x \in \mathbb{T}; 2^{n-1} < |f(x)| \le 2^n\}).$$

Comme

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L^p}^p \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) \le 2^p \|f\|_{L^p}^p \\ \text{(3.90)} \qquad &\text{et, pour } t>0, \quad \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 2^n \ge t}} m_n(f) \le \lambda(\{x \in \mathbb{T}; t < |f(x)|\}) \le \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 2^n \ge t}} m_{n-1}(f) \end{aligned}$$

pour $1 \le p < +\infty$, on a

1. f est de type L^p-faible si et seulement si la suite $(m_n(f)\, 2^{np})_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.
2. $f \in L^p(\lambda)$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) < +\infty$.

En utilisant une technique similaire à celle employées dans la preuve du théorème 3.108, nous démontrons

Théorème 3.110 (Riesz)**.** *Pour $1 < p < +\infty$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^p(\mathbb{T})$.*

La preuve du théorème 3.108 utilise une méthode d'interpolation. Par sa définition (voir la définition 3.6), l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^2(\mathbb{T})$ de norme 1. D'autre part, dans le théorème 3.102, on a obtenue que cette application envoie $L^1(T)$ dans L^1-faible. Dans la preuve du théorème 3.108, on a utilisé ces deux informations pour obtenir une information sur le comportement de cette application linéaire sur l'espace $L\log^+ L(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}); |f(\cdot)|\log^+|f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{T})\}$, un espace intermédiaire entre $L^2(\mathbb{T})$ et $L^1(\mathbb{T})$ i.e. $L^2(\mathbb{T}) \subset L\log^+ L(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Preuve du théorème 3.110. Soit $1 < p < +\infty$. Comme dit, on sait que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T})$. D'autre part, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour $f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^q(\mathbb{T})$, on calcule

$$\text{(3.91)} \qquad \langle \tilde{f}, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\,\mathrm{sgn}(n) \hat{f(n)}\overline{\hat{g}(n)} = -\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\tilde{g}(x)}dx = -\langle f, \tilde{g}\rangle.$$

Supposons que l'on ait montré que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée par C sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p \le 2$, l'équation ci-dessus nous dit que $\tilde{g}$ définit une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ pour la norme L^p qui vérifie

$$|\langle f, \tilde{g}\rangle| \le C\|g\|_{L^q}\|f\|_{L^p}$$

Cette forme se prolonge donc continûment à $L^p(\mathbb{T})$ (comme $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ contient les fonctions continues qui sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$)). Par le théorème 2.25, on obtient que, si $g \in L^q(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ alors $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{T})$ et que $\|\tilde{g}\|_{L^q} \le C\|g\|_{L^q}$.
Il nous suffit donc de démontrer le théorème 3.110 pour $1 < p < 2$.

Remarque 3.111. L'égalité (3.91) montre que, sur $L^2(\mathbb{T})$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est l'opposée de son adjoint ; ceci reste vrai sur $L^p(\mathbb{T})$, l'adjoint agissant sur $L^q(\mathbb{T})$, le dual de $L^p(\mathbb{T})$.

On suppose donc que $1 < p < 2$. Par le premier encadrement dans (3.90), il nous suffit d'estimer les $(m_n(\tilde{f}))_{n\in\mathbb{Z}}$. Décomposons $f = f_n + g_n$ où $f_n := f\,\mathbf{1}_{\{x;|f(x)|>2^n\}}$. Comme $1 < p < 2$, on sait que $f_n \in L^1(\mathbb{T})$ et $g_n \in L^2(\mathbb{T})$. Par (3.90), on a donc

$$\|f_n\|_{L^1} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f) \quad \text{et} \quad \|g_n\|_{L^2} \leq \sum_{k\leq n} 2^{2n} m_k(f). \tag{3.92}$$

Par linéarité, $\tilde{f} = \widetilde{f_n} + \widetilde{g_n}$, Donc, par l'analogue de (3.85), on a

$$m_{n+1}(\tilde{f}) \leq |\{t; |\widetilde{f_n}| \geq 2^{n-1}\}| + |\{t; |\widetilde{g_n}| \geq 2^{n-1}\}|. \tag{3.93}$$

Ainsi, par (3.73), on a

$$|\{t; |\widetilde{f_n}| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-n+9}\|f_n\|_{L^1} \leq 2^9\, 2^{-n} \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f).$$

D'autre part, comme la conjugaison est de norme 1 sur $L^2(\mathbb{T})$, on a

$$|\{t; |\widetilde{g_n}| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-2n+2}\|g_n\|_{L^2} \leq 4\, 2^{-2n} \sum_{k\leq n} 2^{2k} m_k(f).$$

Par (3.93) et (3.90), on en déduit

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{L^p}^p &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_n(\tilde{f}) \leq 2^9 \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \left(2^{-n} \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f) + 2^{-2n} \sum_{k\leq n} 2^{2k} m_k(f) \right) \\
&\leq 2^9 \left(\sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z} \\ k\geq n}} 2^{(n-k)(p-1)} 2^{kp} m_k(f) + \sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z} \\ k\leq n}} 2^{(p-2)(n-k)} 2^{kp} m_k(f) \right) \\
&\leq 2^9 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\leq k} 2^{(n-k)(p-1)} + \sum_{n\geq k} 2^{(p-2)(n-k)} \right) 2^{kp} m_k(f) \\
&\leq 2^9 \left(\frac{1}{1-2^{1-p}} + \frac{1}{1-2^{p-2}} \right) \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.110. $\square$

Chapitre 4

Appendice

4.1 Inégalités

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x-y|^2/2 \geq 0$, ce qui s'écrit aussi $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. On peut aussi réecrire cela en disant que

$$\forall a, b \geq 0, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \tag{4.1}$$

L'inégalité suivante, qui est à la base de la plupart des inégalités de ce chapitre, est une version pour une combinaison plus générale. Elle exprime que le logarithme est concave.
Il peut être pratique d'autoriser la valeur $+\infty$. Si besoin, on conviendra que $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Proposition 4.1 (Inégalité arithmético-géométrique). *Soit $t \in]0,1[$ et $a, b \in [0, +\infty]$. Alors*

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)a + tb \tag{4.2}$$

avec, lorsque a et b sont finis, égalité si et seulement si $b = a$.

L'inégalité est aussi vraie, mais triviale, lorsque $t = 0$ ou $t = 1$.

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est vraie, et il y a égalité si et seulement si $b = 0$. Si $a = +\infty$ ou $b = \infty$, l'inégalité est trivialement vraie. On peut donc supposer $0 < a, b < +\infty$. Introduisons la fonction C^1 sur $]0, +\infty[$ définie par

$$\forall a > 0, \quad f(a) = a^{1-t}b^t - (1-t)a - tb. \tag{4.3}$$

On a $f'(a) = (1-t)a^{-t}b^t - (1-t) = (1-t)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t - 1\right]$. Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]0, b]$ et (strictement) décroissante sur $[b, +\infty[$, ce qui veut dire qu'elle atteint son maximum en $a = b$. Or $f(b) = 0$ et donc $f \leq 0$. La stricte monotonie assure que f ne s'annule que en b. $\square$

Pour $\lambda > 0$, on peut multiplier a par $\lambda^{1/(1-t)}$ et b par $1/\lambda^{1/t}$ et on obtient le

Lemme 4.2 (Inégalité arithmético-géométrique bis). *Soit $t \in]0,1[$. Alors, pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a*

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \tag{4.4}$$

et, lorsque a et b sont finis, il y a égalité si et seulement si $\lambda^{\frac{1}{1-t}} a = \frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}$.
En particulier, si $0 < a, b < +\infty$, *il y a égalité pour un certain* $\lambda > 0$, *ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0} \left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \right) = \min_{\lambda>0} \left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \right) \; = \; a^{1-t} b^t. \tag{4.5}$$

Démonstration. Il suffit donc de prendre $\lambda := \left(\dfrac{b}{a}\right)^{t(1-t)}$. □

On préfère parfois introduire $p = \frac{1}{1-t} \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{1}{t} \in]1, +\infty[$, qui vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ –on dit que ces nombres sont *conjugués*[1]–, et remplacer a par a^p et b par b^q, de sorte qu'on trouve le

Lemme 4.3 (Inégalité arithmético-géométrique bis bis)**.** *Soit* $p, q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors, pour* $a, b \in [0, +\infty]$ *et* $\lambda > 0$ *on a*

$$ab \le \lambda^p \, a^p/p + \lambda^{-q} \, b^q/q \tag{4.6}$$

et, lorsque a et b sont finis, il y a égalité si et seulement si $\lambda^p a^p = \lambda^{-q} b^q$.
En particulier, si $0 < a, b < +\infty$, *il y a égalité pour un certain* $\lambda > 0$, *ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0} \left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q} b^q/q\right) = \min_{\lambda>0} \left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q} b^q/q\right) \; = \; ab. \tag{4.7}$$

Sous cette dernière forme, l'inégalité arithmético-géométrique s'appelle aussi *inégalité d'Young*. L'inégalité la plus simple et la plus classique (liée à Cauchy-Schwartz) correspond à $t = 1/2$, c'est-à-dire $p = q = 2$.

1. par exemple $p = q = 2$ ou $p = 1$ et $q = +\infty$ (ici non considéré)

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.