Master 1 - Mathématiques

MM030 ≪ Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz ≫

Corrigé de l'épreuve du 06/05/2019

Exercice 1. 1. Voir le cours.

2. On a bien $\lambda = |\mu|$. En effet, on a clairement $\lambda \leq |\mu|$. D'autre part, si cette inégalité était stricte, on pourrait choisir $E \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(E) + \varepsilon \leq |\mu|(E)$. Soit $(F_j)_{j\geq 1}$ une partition de E telle que $\sum_{j\geq 1} |\mu(F_j)| \geq |\mu|(E) - \varepsilon/3$. On aurait alors pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{1\leq j\leq n} |\mu(F_j)| + \varepsilon \leq |\mu|(E) \leq \sum_{j\geq 1} |\mu(F_j)| + \varepsilon/3.$$
Donc, pour tout n, $\sum_{j\geq n+1} |\mu(F_j)| \geq 2\varepsilon/3$ ce qui contredit la convergence de $\sum_{1\leq j} |\mu(F_j)|$ (qui, d'après le cours, découle du fait que μ est une mesure complexe).

3. Par définition, l'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ est clairement sous-additive (i.e. $|\mu + \nu|(X) \leq |\mu|(X) + |\nu|(X)$), homogène de degré 1 et son seul zéro est la mesure nulle. Montrons que l'espace des mesures complexes est complet pour cette norme. Supposons que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Alors, pour tout $E \in \mathcal{S}$, la suite $(\mu_n(E))_{n\geq 1}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{C}$) car
$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq |\mu_n - \mu_m|(E) \leq \|\mu_n - \mu_m\|.$$
Soit $\mu(E)$ sa limite. Montrons qu'elle est σ-additive. Par définition, Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ a
$$\sup_{E\in\mathcal{S}} |\mu(E) - \mu_n(E)| \leq \sup_{m\geq n} \sup_{E\in\mathcal{S}} |\mu_m - \mu_n|(E) \leq \sup_{m\geq n} \|\mu_m - \mu_n\| \leq \varepsilon.$$
Soit $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ partition de E. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 > 0$ tel que si $n \geq n_0$,
$$\sup_{K\geq 1} \left| \mu\Big(\bigcup_{1\leq k\leq K} E_k\Big) - \sum_{1\leq k\leq K} \mu_n(E_k) \right| \leq \varepsilon.$$
En fixant K et en laissant tendre n vers l'infini, on voit que μ est additive. D'autre part, pour $n \geq n_0$, on a $\left|\mu\left(\bigcup_{k>K} E_k\right) - \sum_{k>K} \mu_n(E_k)\right| \leq \varepsilon$. Donc, en fixant n et choisissant K suffisamment grand, on a $\left|\mu\left(\bigcup_{k>K} E_k\right)\right| \leq 2\varepsilon$. Donc, par additivité de μ, $\mu(E) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{1\leq k\leq K} \mu(E_k)$. Ainsi μ est une mesure complexe.

Enfin, par la question 2, on a, pour $n \geq n_0$
$$\begin{aligned}\|\mu - \mu_n\| = |\mu - \mu_n|(X) &\leq \sup_{(X_j)_j \text{ partition finie de } X} \sum_j |(\mu - \mu_n)(X_j)| \\ &= \sup_{(X_j)_j \text{ partition finie de } X} \lim_{m\to+\infty} \sum_j |(\mu_m - \mu_n)(X_j)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$
Ceci donne la convergence annoncée.

Exercice 2. 1. Voir le cours.

2. Voir le cours.
3. (a) Pour $\delta > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_\delta^\pi P(r,\theta')\cdot|f(\theta-\theta')-f(\theta)|d\theta'$ tend vers 0 quand $r \to 1^-$: en effet, quand $r\to 1^-$, $\theta \mapsto P(r,\theta')$ tend vers 0 uniformément sur $[\delta,\pi]$ et f est intégrable.
   (b) On calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,a)da = 1$ ce qui donne le résultat souhaité.
   (c) Comme f est intégrable, sa primitive est absolument continue. On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$(1)\qquad \int_{1-r}^{\delta} P(r,\theta')\cdot|f(\theta-\theta')-f(\theta)|d\theta' = [P(r,a)\,F(a)]_{1-r}^{\delta} - \int_{1-r}^{\delta} \partial_a P(r,a)\,F(a)da.$$

   On calcule $\partial_a P(r,a) = -\dfrac{2r(1-r^2)\sin a}{(1+r^2-2r\cos a)^2}$ et on constate que cette dérivée est négative pour $0\le a<\pi$ et $0<r<1$. Comme $F(a)\ge 0$, en vertu de l'égalité ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} 0 \le \int_{1-r}^{\delta} (-\partial_a P(r,a))\,F(a)da &\le \left(\int_{1-r}^{\delta}(-a\partial_a P(r,a))da\right)\sup_{0<a\le\delta}\frac{1}{a}F(a) \\ &= \left(-\,[a\,P(r,a)]_{1-r}^{\delta} + \int_{1-r}^{\delta} P(r,a)da\right)\sup_{0<a\le\delta}\frac{1}{a}F(a). \end{aligned}$$

   D'autre part, $(1-r)P(r,1-r)$ reste borné quand $r\to 1^-$; on en déduit qu'il existe $C>0$ tel que

$$0 \le \int_{1-r}^{\delta} P(r,\theta')\cdot|f(\theta-\theta')-f(\theta)|d\theta' - [P(r,a)\,F(a)]_{1-r}^{\delta} \le C\sup_{0<a\le\delta}\frac{1}{a}F(a)$$

   (d) En remplaçant ceci dans (1) et en tenant compte de ce qui a été fait précédemment, on obtient qu'il existe $C>0$ tel que

$$0 \le \limsup_{r\to 1^-}\left(\int_{1-r}^{\pi} P(r,\theta')\cdot|f(\theta-\theta')-f(\theta)|d\theta'\right) \le C\sup_{0<a\le\delta}\frac{1}{a}F(a).$$

   Comme θ est un point de Lebesgue de f, on sait que $\displaystyle\sup_{0<a\le\delta}\frac{1}{a}F(a) \underset{\delta\to 0^+}{\to} 0$. On obtient donc la convergence annoncée.
4. Pour $\theta\neq 0$, on a

$$Q(1,\theta) = \frac{2\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} = \operatorname{cotan}\theta/2.$$

   Pour $0<r<1$ et $1-r<\theta<\pi$, on a

$$\begin{aligned} Q(1,\theta)-Q(r,\theta) = \frac{2\sin\theta}{2-2\cos\theta} - \frac{2r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} &= \frac{(1-r)^2\sin\theta}{(1-\cos\theta)(1-2r\cos\theta+r^2)} \\ &= \frac{1-r}{1+r}Q(1,\theta)P(r,\theta) \le \frac{1-r}{1+r}Q(1,1-r)P(r,\theta) \le \frac{2}{1+r}P(r,\theta) \end{aligned}$$

   comme $(1-r)Q(1,1-r)\le 2$. Comme $\theta\in]0,\pi[$ La positivité suit de la première égalité.
5. Pour $|\theta|<1-r$, on a $|\sin\theta|\le 1-r$, donc

$$|Q(r,\theta)| = \frac{2r|\sin\theta|}{|1-2r\cos\theta+r^2|} \le \frac{2|\sin\theta|}{(1-r)^2} \le 2(1-r)^{-1}.$$

6. Pour $r < 1$, posons $\varepsilon = 1 - r$. Par définition de la conjuguée, après un changement de variable $\theta \Leftrightarrow \theta - \theta'$, on calcule

$$2\pi\tilde{f}(re^{i\theta}) - \int_{|\theta-\theta'|>\varepsilon} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) f(\theta')d\theta'$$
$$= \int_{|\theta'|\leq\varepsilon} Q(r,\theta')f(\theta-\theta')d\theta' + \int_{|\theta'|>\varepsilon} \big(Q(r,\theta') - Q(1,\theta')\big) f(\theta-\theta')d\theta'.$$

Donc, comme $\theta \mapsto Q(r,\theta)$ et $\theta \mapsto Q(1,\theta)\mathbf{1}_{|\theta|>\varepsilon}$ sont impaires, donc d'intégrales nulles sur des ensembles symétriques par rapport à 0, on a

$$2\pi\tilde{f}(re^{i\theta}) - \int_{|\theta-\theta'|>\varepsilon} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) f(\theta')d\theta'$$
$$= \int_{|\theta'|\leq\varepsilon} Q(r,\theta')[f(\theta-\theta') - f(\theta)]d\theta' + \int_{|\theta'|>\varepsilon} \big(Q(r,\theta') - Q(1,\theta')\big) [f(\theta-\theta') - f(\theta)]d\theta'.$$

Ainsi, les questions 2 et 3 nous donnent

$$2\pi\left|\tilde{f}(e^{i\theta}) - \int_{|\theta-\theta'|>\varepsilon} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) f(\theta')d\theta'\right|$$
$$\leq 2\pi\left|\tilde{f}(re^{i\theta}) - \tilde{f}(e^{i\theta})\right| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{|\theta'|\leq\varepsilon} |f(\theta-\theta') - f(\theta)|d\theta' + \int_{|\theta'|>1-r} \frac{P(r,\theta')}{1+r} \cdot |f(\theta-\theta') - f(\theta)|d\theta'.$$

7. Par définition de la conjuguée d'une fonction L^1 (voir la première question), on sait que le premier terme du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 presque partout. D'autre part, en tout point de Lebesgue de f (donc en presque tout point), le second terme tend vers 0. Enfin pour le troisième terme du membre de droite, on sépare les intégrales sur les θ' positifs et ceux négatifs et on applique la question 2 (comme $(1+r)^{-1}$ reste borné quand $r \to 1^-$) pour obtenir qu'il tend aussi vers 0 en tout point de Lebesgue de f.

Exercice 3. 1. Si $\alpha = p/q$ avec (p,q) premier entre eux, comme $p = 1 \mod q$, $n\alpha = r/q \mod q$ si $n = r \mod q$. Donc $\{[\alpha n]; n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1/q, \cdots, (q-1)/q\}$. Réciproquement, si $\{[\alpha n]; n \in \mathbb{N}\}$ est fini, comme l'ensemble des entiers est infini, il existe $n \neq m$ entiers tels que $[\alpha n] = [\alpha m]$ c'est à dire tel que $\alpha(n-m)$ est entier. α est donc rationnel.

2. Par linéarité en P des deux membres de l'égalité à prouver, il suffit de vérifier cette égalité pour tout monôme $P(t) = e^{2i\pi kt}$ ($k \in \mathbb{N}$). En utilisant la 1-périodicité du monôme, on calcule

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k[\alpha n]} = \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi kn\alpha} = \begin{cases} N & \text{si } k = 0, \\ e^{2i\pi k\alpha}\frac{e^{2i\pi kN\alpha}-1}{e^{2i\pi k\alpha}-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'égalité annoncée est donc vérifiée.

3. Le théorème de Weierstrass nous dit que, pour f continue 1-périodique, il existe une suite de polynômes trigonométriques, disons, $(P_n)_{n\geq1}$, qui tend uniformément vers f. Pour tout N et k, on a donc

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f([\alpha n]) - \int_0^1 f(t)dt\right| \leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_k([\alpha n]) - \int_0^1 P_k(t)dt\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f([\alpha n]) - P_k([\alpha n]) - \int_0^1 (f(t) - P_k(t))dt\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_k([\alpha n]) - \int_0^1 P_k(t)dt\right| + 2\|f - P_k\|_\infty$$

En utilisant la question 1 pour passer à la limite $N \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient, pour tout k,

$$\limsup_{N\to+\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f([\alpha n]) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leq 2\|f - P_k\|_\infty$$

En laissant maintenant k tendre vers l'infini, on obtient le résultat annoncé.

4. On va approcher la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$ par des fonctions continues. Plus précisément, pour $n > 2(b-a)^{-1}$, soit χ_n^+ (resp. χ_n^-) la fonction continue qui vaut 1 sur $[a, b]$ (resp. $[a + 1/n, b - 1/n]$, est nulle hors de $[a - 1/n, b + 1/n]$ (resp. $[a, b]$) et qui est affine sur $[a - 1/n, a]$ (resp. $[a, a + 1/n]$) et $[b, b + 1/n]$ (resp. $[b - 1/n, b]$. On a $\chi_n^- \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq \chi_n^+$. Donc, pur $k \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} \chi_k^-([\alpha n]) \leq \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b]}([\alpha n]) \leq \sum_{n=1}^{N} \chi_k^+([\alpha n]).$$

Ainsi, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{k} \leq \int_0^1 (\chi_k^-(t) - \mathbf{1}_{[a,b]}(t))dt &= \liminf_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_k^-([\alpha n]) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(t)dt \right) \\
&\leq \liminf_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b]}([\alpha n]) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(t)dt \right) \\
&\leq \limsup_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b]}([\alpha n]) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(t)dt \right) \\
&\leq \limsup_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_k^+([\alpha n]) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(t) \right) = \int_0^1 (\mathbf{1}_{[a,b]}(t) - \chi_k^+(t))dt \leq \frac{2}{k}
\end{aligned}$$

En laissant tendre k vers l'infini, on obtient le résultat souhaité.

5. On conclut en remarquant que $\#_{[a,b]}^{\alpha}(N) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b]}([\alpha n])$.

Exercice 4. Voir le corrigé de l'exercice 15 feuille 5.