Master 1 - Mathématiques

MM030 « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »

Corrigé de l'épreuve du 11/06/2019

Exercice 1. On pourra consulter le corrigé de l'exercice 11 de la feuille de TD 2.

Exercice 2.

1. Quand f est harmonique, un changement de variable en coordonnées polaires et la formule de la moyenne nous donnent
$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(z,r)} f(x+iy)dxdy = \frac{2}{r^2}\int_0^r \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})d\theta\,\rho\,d\rho = f(z)\frac{2}{r^2}\int_0^r \rho\,d\rho = f(z).$$
2. Soit $\Omega_r = \{z\in\Omega; D(z,r)\subset\Omega\}$. Comme f est localement intégrable, pour $z\in\Omega_r$, la fonction $(x,y)\mapsto(2\pi r^2)^{-1}\mathbf{1}_{D(z,r)}(x+iy)f(x+iy)$ est intégrable sur Ω. Donc par le Corollaire 1.69 du polycopié, $z\in\Omega_r\mapsto(2\pi r^2)^{-1}\mathbf{1}_{D(z,r)}f\in L^1(\Omega)$ est continue. Ainsi l'intégrale dans le membre de droite de (3) de l'énoncé est une fonction continue de z dans Ω_r. Or $\Omega = \bigcup_{r>0}\Omega_r$. Si f satisfait (3) de l'énoncé, f est donc continue sur Ω.
3. On calcule $\int_{D(z,r)} f(x+iy)dxdy = 2\pi\int_0^r \rho\overline{f}_z(\rho)d\rho$ où $\overline{f}_z(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$. Comme f est continue, le théorème de continuité sous le signe somme nous dit que, pour $z\in\Omega_r$, $\rho\mapsto\overline{f}_z(\rho)$ est continue sur $[0,r[$. Ainsi $r\mapsto\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(z,r)} f(x+iy)dxdy$ est dérivable sur $[0,r[$
4. Comme f vérifie (3) de l'énoncé, la dérivée en r de cette intégrale est nulle. Donc $D0 = -\frac{2}{r^3}\int_0^r \rho\overline{f}_z(\rho)d\rho + \frac{1}{r^2}r\overline{f}_z(r) = -\frac{1}{r}f(z)+\frac{1}{r}\overline{f}_z(r)$. Ainsi on a $f(z) = \overline{f}_z(r)$; donc f vérifie la formule de la moyenne dans Ω et est continue sur Ω ; elle y est donc harmonique.

Exercice 3.

1. Comme $\sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c|n|}|\hat{f}(n)| < +\infty$, on sait que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2i\pi n\theta}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Féjer nous garantit qu'elle est donc égale f. Or la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2i\pi n\theta}$ est une série de fonctions analytiques (i.e. développables en série entière) qui converge uniformément, elle est donc elle même développable en série entière.
Soit $0<c'<c$. On calcule
$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left[e^{2\pi(c-c')|n|}\sup_{|\operatorname{Im}\theta|<c'}\left|\hat{f}(n)e^{-2i\pi n\theta}\right|\right] = \sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c|n|}|\hat{f}(n)| < +\infty$$
La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2i\pi n\theta}$ converge donc uniforméent dans $\{\theta\in\mathbb{C}; |\operatorname{Im}\theta|<c'\}$. Sa somme est y donc analytique. Ceci étant vrai pour tout $0<c'<c$, on sait qu'elle est analytique dans la bande $\{\theta\in\mathbb{C}; |\operatorname{Im}\theta|<c\}$.

2. Soit $c > 0$. Comme f est une fonction 1-périodique analytique dans la bande $\mathbb{R} + ic] - 1, 1[$, elle y est continue ; elle est en particulier continue sur le réelle donc localement intégrable. Ainsi, $f \in L^1(\mathbb{T})$.
Pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $0 < c' < c$. Par le théoreme de Cauchy et déformation de contour, on calcule

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \int_0^1 f(\theta)e^{-2i\pi n\theta}d\theta \\
&= \int_0^{-c'n/|n|i} f(\theta)e^{-2i\pi n\theta}d\theta + \int_{-c'n/|n|i}^{1-c'n/|n|i} f(\theta)e^{-2i\pi n\theta}d\theta + \int_{1-c'n/|n|i[0,1]}^{1} f(\theta)e^{-2i\pi n\theta}d\theta \\
&= \int_0^{-c'n/|n|i} [f(\theta) - f(\theta+1)]e^{-2i\pi n\theta}d\theta + e^{-2i\pi|n|c'} \int_0^1 f(\theta - c'n/|n|i)e^{-2i\pi n\theta}d\theta \\
&= e^{-2i\pi|n|c'} \int_0^1 f(\theta - c'n/|n|i)e^{-2i\pi n\theta}d\theta
\end{aligned}$$

comme f est 1-périodique.
Comme f est une fonction 1-périodique analytique dans la bande $\mathbb{R} + ic] - 1, 1[$, elle est bornée sur $\mathbb{R} + ic'[-1, 1]$ pour $0 < c' < c$. On a donc $\sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c'|n|}|\hat{f}(n)| < \sup_{|\operatorname{Im}\theta|\leq c'} |f(\theta)| < +\infty$.

3. On peut par exemple prendre $f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-2\pi c|n|}e^{2i\pi n\theta}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{f}(n) = n^2 e^{-2\pi c|n|}$. Ainsi, pour $0 < c' < c$, on a $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{2\pi c'|n|}|\hat{f}(n)|\right) < \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(n^2 e^{-2\pi(c-c')|n|}\right) < +\infty$.
Ainsi f est 1-périodique et analytique dans la bande $\mathbb{R} + ic'] - 1, 1[$ pour $0 < c' < c$, donc dans la bande $\mathbb{R} + ic] - 1, 1[$.

Exercice 4. 1. f_α est localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$ (car localement bornée). Elle y définit donc une distribution.

2. Pour $\operatorname{Re}\alpha > -1$, f_α est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$; elle y définit donc une distribution qui coïncide avec f_α sur $\mathbb{R}^*$.
Pour α arbitraire, on peut trouver un entier naturel n tel que $\operatorname{Re}(\alpha+n) > -1$ et on a $x^n f_\alpha = f_{\alpha+n}$. Pour prolonger f_α à $\mathbb{R}$, il suffit de trouver une distribution U telle que $x^n U = f_{\alpha+n}$. Cela a été fait en cours (section 3.2.4 du polycopié de N. Lerner).
3. f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$ (car localement bornée). Elle définit donc une distribution.
4. Montrons qu'il n'en existe pas. S'il existait un prolongement, disons U, celui-ci vérifierai que si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tendant vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, alors $\langle U, \varphi_n\rangle$ tendrait vers 0. Or si on prend $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(] - 1, 1[)$ à valeurs positives telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [-1/2, 1/2]$ et que l'on pose $\varphi_n(x) = e^{-n/2}\varphi\left(2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right)\right)$, on calcule
   — pour $n \geq 1$, le support de φ_n est contenu dans $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}[-1, 1] \subset]0, 1]$;
   — pour $k \in \mathbb{N}$, $\left\|\frac{d^k}{dx^k}\varphi_n\right\|_\infty \leq e^{-n/2}(2n^2)^k\|\varphi^{(k)}\|_\infty$ et tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini.

— comme supp$\varphi_n \subset]0,1]$ et que φ est positive (donc φ_n aussi),

$$\langle U, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^{+\infty} e^{1/x} \varphi_n(x) dx \geq \int_{\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}}^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}} e^{1/x} e^{-n/2} dx \geq \frac{1}{2n^2} e^{2n/(1+1/(2n))-n/2}.$$

Donc $(\langle U, \varphi_n \rangle)_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Ceci contredit l'existence de U comme $(\varphi_n)_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

1. On vérifie aisément que $U :=$pf$\,(1/x^2)$ est la dérivée de $-$vp$\,(1/x)$. On en déduit $\hat{U}$ est égale au produit de $\xi \mapsto 2i\pi\xi$ et de la transformée de Fourier de $-$vp$\,(1/x)$ laquelle a été calculée en cours (voir la section 4.1.5 du polycopié de N. Lerner) ; elle vaut $i\pi(1-2H(\xi))$. Ainsi, $\hat{U} = 2\pi^2|\xi|$.
2. Le calcul de la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{i\pi x^2}$ a été fait en cours (section 4.6.2 du polycopié de N. Lerner) ; elle vaut $\xi \mapsto e^{i\pi/4} e^{-i\pi\xi^2}$. Du passage au produit tensoriel, on déduit que, si (ξ, η, τ) sont les variables duales de (x, y, z) alors la transformée de Fourier cherchée est $(\xi, \eta, \tau) \mapsto e^{i\pi/4} e^{-i\pi(\xi^2-\eta^2+\tau^2)}$.