Master 1 - Mathématiques

4M030 « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »

Examen du 06/05/2019 de 08h30 à 11h30 en salle 14-24-110

Aucun document n'est autorisé.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$.

1. Rappeler la définition de $|\mu|$, la variation totale de μ.
2. Pour $E \in \mathcal{S}$, posons
$$\lambda(E) = \sup_{(E_j)_j \text{ partition finie de } E} \sum_j |\mu(E_j)|.$$
A-t-on $\lambda = |\mu|$?
3. Montrer que l'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ (muni de ses opérations naturelles) et qu'ainsi normé, cet espace est complet.

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On note $\tilde{f}$ sa fonction conjuguée. Le but de l'exercice est de démontrer que, pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, on a

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta'| > \varepsilon} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) f(\theta') d\theta'. \tag{1}$$

1. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, rappeler brièvement la définition de $\tilde{f}$, la fonction conjuguée de f.
2. Rappeler la définition de $P(r, \theta)$, le noyau de Poisson dans $\mathbb{D}$, le disque unité, ainsi que celle de sa fonction conjuguée (dans le disque unité) notée $Q(r, \theta)$ (normalisée par $Q(0, \theta) = 0$).
3. Soit θ est un point de Lebesgue de f, une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$. Le but de cette question est de montrer qu'alors
$$\lim_{r \to 1^-} \int_{1-r}^{\pi} P(r, \theta') \cdot |f(\theta - \theta') - f(\theta)| d\theta' = 0.$$
   (a) Soit $0 < \delta < \pi/2$. Montrer que $\lim_{r \to 1^-} \int_{\delta}^{\pi} P(r, \theta') \cdot |f(\theta - \theta') - f(\theta)| d\theta' = 0$.

   (b) Montrer que $\sup_{1-\rho < r < 1} \int_{1-r}^{\pi/2} P(r, a) da < +\infty$.

   (c) Posons $F(a) = \int_0^a |f(\theta - \theta') - f(\theta)| d\theta'$. En justifiant deux intégrations par parties, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour $0 < \delta < \pi/2$ et $1 - \rho < r < 1$, on a
$$0 \le \int_{1-r}^{\delta} P(r, \theta') \cdot |f(\theta - \theta') - f(\theta)| d\theta' - [P(r, a)\, F(a)]_{1-r}^{\delta} \le C \sup_{0 < a \le \delta} \frac{1}{a} F(a)$$

   (d) Conclure.
4. Vérifier que, pour $\theta \neq 0$, on a $Q(1, \theta) = \lim_{r \to 1^-} Q(r, \theta) = \operatorname{cotan}(\theta/2)$ et montrer que, pour $0 < r < 1$ et $1 - r < \theta < \pi$, on a
$$0 \le Q(1, \theta) - Q(r, \theta) \le \frac{1 - r}{1 + r} Q(1, 1 - r) P(r, \theta) \le \frac{2}{1 + r} P(r, \theta).$$

5. Montrer que, pour $|\theta| < 1 - r$, on a $|Q(r, \theta)| \leq 2(1-r)^{-1}$.
6. En remarquant que $\theta \mapsto Q(r,\theta)$ et $\theta \mapsto Q(1,\theta)\mathbf{1}_{|\theta|>\varepsilon}$ sont impaires, montrer que

$$\left|\tilde{f}(\theta) - \int_{|\theta-\theta'|>\varepsilon} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) f(\theta')d\theta'\right|$$
$$\leq \left|\tilde{f}(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)\right| + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|\theta'|\leq\varepsilon} |f(\theta-\theta') - f(\theta)|d\theta' + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta'|>1-r} \frac{P(r,\theta')}{1+r} \cdot |f(\theta-\theta') - f(\theta)|d\theta'.$$

7. Montrer que (1) est satisfaite pour presque tout θ.

Exercice 3 (Équidistribution des multiples d'une fréquence irrationelle)**.** Pour r réel, on note $[r]$ le reste de r modulo 1 i.e. l'unique nombre $[r]$ dans $[0,1)$ tel que $r - [r] \in \mathbb{Z}$.
On veut montrer que, si $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ alors les nombres $([\alpha n])_{n\in\mathbb{N}}$ sont équidistribués dans $[0,1)$ au sens suivant : pour $0 \leq a < b \leq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, si on définit $\#^{\alpha}_{[a,b]}(N)$ comme étant le nombre d'éléments de $\{[\alpha n]; 1 \leq n \leq N\}$ dans $[a,b]$ alors $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\#^{\alpha}_{[a,b]}(N) = b - a$.

1. Montrer que α est irrationnel si et seulement si l'ensemble $\{[\alpha n]; n \in \mathbb{N}\}$ est infini.
2. On suppose dans la suite que $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.
   Montrer si P est un polynôme trigonométrique (1-périodique), alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P([\alpha n]) = \int_0^1 P(t)dt. \tag{2}$$

3. En déduire que (2) reste vraie si on remplace P par une fonction continue 1-périodique.
4. En déduire que (2) reste vraie pour la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b]$.
5. Conclure.

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^d$, pour $0 < \alpha < d$, on considère la fonction $f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$.

1. Montrer que f_α définit une distribution tempérée.
2. Montrer que, pour $\alpha \in]d/2, d[$, $\widehat{f_\alpha}$ est la somme d'une fonction entière et d'une fonction de carré intégrable.
3. Montrer que, pour $\alpha \in]d/2, d[$, $\widehat{f_\alpha}(\xi) = c_{\alpha,d}|\xi|^{\alpha-d}$.
4. Déterminer la constante $c_{\alpha,d}$ quand $\alpha \in]d/2, d[$.
5. Calculer $\widehat{f_\alpha}$ pour $\alpha \in]0, d[$.