Master 1 - Mathématiques

4M030 « Analyse réelle, analyse harmonique et distributions de Schwartz »

Examen du 11/06/2019 de 08h30 à 11h30 en salle 14-24-106

Aucun document n'est autorisé.

Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. On définit de maniere récursive les fonctions $(F_n)_{n\geq 0}$ sur $[0,1]$ à dans $[0,1]$ comme suit. Soit $F_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}F_{n-1}(3x) \text{ si } x \in [0,1/3] \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in]1/3, 2/3[\\ \frac{1}{2}(1 + F_{n-1}(3x-2)) \text{ si } x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est continue croissante, que $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.
2. En estimant $\|F_{n+1} - F_n\|_\infty$, montrer que $(F_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $F : [0,1] \to [0,1]$ appelée « fonction de Cantor ».
3. Montrer que F est continue, croissante et vérifie $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
4. On rappelle que $\mathcal{C}$, l'ensemble de Cantor, est défini par $\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i\geq 1} a_i 3^{-i}; (a_i)_{i\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{a} = (a_i)_{1\leq i\leq n} \in \{0,2\}^n$, on pose $I^n_{\overline{a}} = \sum_{1\leq i\leq n} a_i 3^{-i} + 3^{-n}[0,1]$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{\overline{a}\in\{0,2\}^{\{1,\cdots,n\}}} I^n_{\overline{a}}$.

   (b) Calculer $|\mathcal{C}|$, la mesure de Lebesgue de $\mathcal{C}$.
5. Montrer que, pour tout point de $[0,1] \setminus \mathcal{C}$, F est constante sur un voisinage de ce point.
6. En déduire que F est dérivable presque partout et que
$$\int_0^1 F'(x)dx \neq F(1) - F(0).$$
7. Montrer que, pour $(a_i)_{i\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, on a
$$F\left(\sum_{i\geq 1} a_i 3^{-i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} a_i 2^{-i}.$$
8. En déduire que F n'est dérivable en aucun point de $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Comme à l'accoutumée, on identifie $L^1(\mathbb{T})$ avec les fonctions 1-périodiques localement intégrables. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier.

1. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c|n|}|\hat{f}(n)| < +\infty$.

   Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et qu'elle se prolonge en une fonction 1-périodique analytique dans la bande $\mathbb{R} + ic] - 1, 1[$.

2. Soit $c > 0$. Montrer que si f est une fonction 1-périodique analytique dans la bande $\mathbb{R} + ic]-1, 1[$ alors $f \in L^1(\mathbb{T})$ et on a $\sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c'|n|}|\hat{g}(n)| < +\infty$ pour tout $0 < c' < c$.
3. Exhiber une fonction f 1-périodique et analytique dans analytique dans la bande $\mathbb{R}+ic]-1, 1[$ telle que
$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi c|n|}|\hat{f}(n)| = +\infty.$$

Exercice 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (pour la mesure de Lebesgue sur Ω).
On veut montrer que f est harmonique dans Ω si et seulement si, pour tout $z \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D(z, r)} \subset \Omega$, on a

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D(z,r)}} f(x + iy)dxdy. \tag{1}$$

1. Montrer que si f est harmonique dans Ω alors (1) est satisfaite.
2. Montrer que si f satisfait (1) alors f est continue.
3. Montrer qu'alors l'intégrale du membre de droite de (1) est dérivable en r.
4. Conclure.

Exercice 4.
1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f_\alpha(x) = x^\alpha \mathbf{1}_{x>0}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer qu'il existe $\overline{f_\alpha} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\overline{f_\alpha}$ restreinte à $\mathbb{R}^*$ est égale à f_α.
3. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = e^{1/x}\mathbf{1}_{x>0}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
4. Existe-t-il $\overline{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\overline{f}$ restreinte à $\mathbb{R}^*$ soit égale à f ?

Exercice 5. Après avoir brièvement justifié leurs existences, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $\mathrm{pf}\,(1/x^2)$ définie par $\langle \mathrm{pf}\,(1/x^2), \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x} dx$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.
2. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto e^{i\pi(x^2-y^2+z^2)}$;