Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Corrigé de l'épreuve du 05/03/2014

Exercice 1. On veut trouver les courbes intégrales du champ de vecteur $X(t,x) = (x, -t)$ qui n'est autre que l'opposé du champ radial. On sait donc que

$$\begin{cases} t(\theta) & = r_0 \sin\theta \\ x(\theta) & = r_0 \cos\theta \end{cases} \quad \text{où} \quad r_0 = \sqrt{x^2(\theta_0) + t^2(\theta_0)}.$$

On cherche alors $u(x,t) = u(r\sin\theta, r\cos\theta) = U(r,\theta)$. L'équation aux dérivées partielles devient

$$\begin{aligned} \partial_\theta U(r,\theta) &= \partial_\theta (u(r\sin\theta, r\cos\theta)) \\ &= r\cos\theta(\partial_t u)(r\sin\theta, r\cos\theta) - r\sin\theta(\partial_x u)(r\sin\theta, r\cos\theta) \\ &= \left[(x\partial_t - t\partial_x))\, u\right](r\sin\theta, r\cos\theta)(r\sin\theta, r\cos\theta) = f(U(r,\theta)). \end{aligned}$$

On définit la fonction $F(v) = \displaystyle\int_0^v \frac{1}{f(t)}dt$. Comme f ne s'annule pas, elle est bien définie, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone, donc réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$. On a alors

$$U(r,\theta) = F^{-1}\left(F(U(r,\theta_0)) + \theta - \theta_0\right).$$

Comme $x > 0$, la donnée initiale recherchée nous dit que $U(x,0) = g(x)$. Donc la solution recherchée est

$$u(t,x) = F^{-1}\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right) + F\circ g\left(\sqrt{t^2+x^2}\right)\right].$$

On peut noter que, si $F(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, cette solution n'existe pas forcément pour tous les temps et que le temps d'existence local dépend du point au voisinage duquel on se place.

Exercice 2. 1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on calcule

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^n \varphi\left(\frac{1}{p}\right) - n\varphi(0) - \log n\cdot\varphi'(0)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \log n\right)\varphi'(0) + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}\int_0^1 \varphi''\left(\frac{u}{p}\right)(1-u)du\right) \\ &= \gamma\varphi'(0) + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\int_0^1 \varphi''\left(\frac{u}{p}\right)(1-u)du, \end{aligned}$$

la série étant absolument convergente car son terme général est majoré par $p^{-2}\|\varphi''\|_\infty$.
Donc, comme $\gamma \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle T,\varphi\rangle| &\leq \gamma\left|\varphi'(0)\right| + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\int_0^1\left|\varphi''\left(\frac{u}{p}\right)\right|(1-u)du \leq \gamma\left|\varphi'(0)\right| + \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}\left|\varphi''(x)\right|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} \\ &\leq \left(\gamma + \frac{\pi^2}{12}\right)\sup_{0\leq k\leq 2}\sup_{x\in[0,1]}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|. \end{aligned} \tag{1}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 2.
Soit $S := \{n^{-1};\ n \geq 1\} \cup \{0\} = \overline{\{n^{-1};\ n\geq 1\}}$. Montrons que S est le support de T.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \cap S = \emptyset$. Alors $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $\varphi(n^{-1}) = 0$. Ainsi

$$\langle T,\varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^n \varphi\left(\frac{1}{p}\right) - n\varphi(0) - \log n\cdot\varphi'(0)\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Donc $\operatorname{supp} T \subset S$.
D'autre part, soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive telle que $\operatorname{supp}\chi \subset [-1,1]$ et $\chi(x) = 1$ si $x \in [-1/2, 1/2]$. Pour $p \geq 1$, on pose $\chi_p(x) = \chi\left(4p^2(x - p^{-1})\right)$. On a $\chi_p(p^{-1}) = 1$ et si $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\chi_p(n) = 0$. De plus, $\chi_p(x) = 0$ si $2p|x| \leq 1$. Donc $\chi_p(0) = \chi_p'(0) = 0$. On calcule donc $\langle T, \chi_p\rangle = 1$. Ceci prouve que, si $p \geq 1$, $p^{-1} \in \operatorname{supp} T$.
On voit ainsi que $\{n^{-1};\ n \geq 1\} \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, on obtient que $S \subset \operatorname{supp} T$. On a donc montré que $S = \operatorname{supp} T$.

2. L'estimée (1) montrer que T est d'ordre au plus 2. Montrons qu'elle n'est pas d'ordre au plus 1. Pour cela, comme le support de T est contenu dans $[0,1]$, il suffit de trouver une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ telle que
   – $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$
   – le support de φ_n est contenu dans $[-1,3]$,
   – $\sup\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{0\leq k\leq 1} \sup\limits_{x\in[-1,3]} \left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| < +\infty$,
   – $\limsup\limits_{n\to+\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = +\infty$.

   On procède comme suit. Soit $\tilde\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive telle que $\operatorname{supp}\tilde\chi \subset [-1/2, 1/2]$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde\chi(x)dx = 1$. On pose $\tilde\chi_n(x) = 2n^2\tilde\chi(2n^2 x)$. Soit $\tilde\varphi_n = \tilde\chi_n * \mathbf{1}_{[1/n,2]}$. Alors

$$\operatorname{supp}\,\tilde\varphi_n \subset \left[\frac{-1}{4n^2}, \frac{1}{4n^2}\right] + [1/n, 2] \subset \left]\frac{1}{n+1}, \frac{5}{2}\right]. \tag{2}$$

   De plus, pour $n \geq 2$ et $x \in \left]\frac{1}{n-1}, \frac{5}{2}\right]$, on a

$$\tilde\varphi_n(x) = \int_{1/n}^{2} \tilde\chi_n(x-y)dy = \int_{1/n-x}^{2-x} \tilde\chi_n(y)dy = \int_{\operatorname{supp}\tilde\chi_n} \tilde\chi_n(y)dy = 1. \tag{3}$$

   Enfin, on a

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde\varphi_n(x)| \leq \sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde\chi_n(y)dy\right| = 1. \tag{4}$$

   Soit χ comme dans la question 1. On pose alors $\varphi_n(x) = \chi(x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \tilde\varphi_n(t)dt$. Clairement $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$; elle est à valeurs positives ou nulles. Par (4) et (2), on sait que

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq k\leq 1}\sup_{x\in[-1,3]} \left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| \leq \|\chi\|_\infty \sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq k\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde\varphi_n(x)| < +\infty.$$

   Par (2) (et la condition de support sur χ), le support de φ_n est contenu dans $](n+1)^{-1}, 1]$. Enfin, par (3) (et car χ vaut 1 sur $[-1/2, 1/2]$), on sait que $\varphi_n'(x) = 1$ sur $](n-1)^{-1}, 1/2]$. Donc, pour $n \geq 3$ et $p \in \{2, \cdots, n-1\}$, on a

$$\varphi_n(p^{-1}) \geq \varphi_n(n^{-1}) + p^{-1} - n^{-1} \geq p^{-1} - n^{-1}$$

   Ainsi

$$\langle T, \varphi_n\rangle \geq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \sum_{p=2}^{n-1} p^{-1} - \frac{n-2}{n} = \log n - \gamma - 1 + o(1).$$

   En particulier, $\langle T, \varphi_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. T n'est donc pas d'ordre au plus 1 : elle est d'ordre 2.

Exercice 3. 1. On vérifie sans peine que la fonction $x \mapsto P_\alpha(x) := (-1)^{|\alpha|}\dfrac{x^\alpha}{\alpha!}$ convient.

2. (a) Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Soit $K' \subset \mathbb{R}^{d'}$ un compact. Pour $\psi \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^{d'})$, $\varphi \otimes \psi$ a son support dans un compact fixé $K \times K'$. On calcule

$$\begin{aligned}
|\langle T_\varphi, \psi\rangle| = |\langle T, \varphi\otimes\psi\rangle| &\leq C \sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leq N} \left\|\partial^\alpha\partial^{\alpha'}\varphi\otimes\psi\right\|_{K\times K'} \\
&\leq \left[C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha\varphi\|_K\right] \sup_{|\alpha'|\leq N} \left\|\partial^{\alpha'}\psi\right\|_{K'}.
\end{aligned}$$

   Donc T_φ définit bien une distribution sur $\mathbb{R}^{d'}$.

(b) Montrons que $\operatorname{supp} T_\varphi \subset \{0\}$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$ tel que $0 \notin \operatorname{supp} \psi$. Alors le support de $\varphi \otimes \psi$ ne rencontre pas $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Donc $\langle T_\varphi, \psi\rangle = \langle T, \varphi \otimes \psi\rangle = 0$.
D'après le Théorème 3.3.4 du cours , il existe $n \geq 0$ et des coefficients complexes $(S_a(\varphi))_{|a|\leq n}$ indexés par des multi-indices $a = (a_1, \dots, a_{d'})$ tels que $T_\varphi = \sum_{|a|\leq n} S_a(\varphi)\partial^a \delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0 dans $\mathbb{R}^{d'}$.

(c) D'après la question 1, on a

$$S_a(\varphi) = \langle T_\varphi, P_a\rangle = \langle T, \varphi \otimes P_a\rangle. \tag{5}$$

On démontre alors, exactement comme dans la question 2(a), que $\varphi \mapsto S_a(\varphi) = \langle S_a, \varphi\rangle$ est une distribution sur $\mathbb{R}^d$.
Comme pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$, on a

$$\langle T, \varphi \otimes \psi\rangle = \sum_{|a|\leq n} \langle S_a, \varphi\rangle \langle \partial^a \delta_0, \psi\rangle = \left\langle \sum_{|a|\leq n} S_a \otimes \partial^a \delta_0, \varphi \otimes \psi \right\rangle$$

la Proposition 3.4.10 implique que $T = \sum_{|a|\leq n} S_a \otimes \partial^a \delta_0$.

3. (a) Considérons $T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}$, la restriction de T à $\{(x, y); y \neq 0\} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^2 \setminus D_X$. Comme le support de T est contenu dans $D_X \cup D_Y$, le support de $T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}$ est contenu dans $\{0\} \times \mathbb{R}^* = D_Y \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \subset D_Y$. De la même façon que dans la question 2, on montre alors que $T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} = \sum_{a=0}^{n} \delta_0^{(a)} \otimes S_a$ où les $(S_a)_a$ sont des distributions sur $\mathbb{R}^*$. De même, on obtient $T_{|\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} = \sum_{a=0}^{m} U_a \otimes \delta_0^{(a)}$ où les $(U_a)_a$ sont des distributions sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Par (5), comme dans la question 2(c), on sait que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, on a

$$\langle S_a, \varphi\rangle = \langle T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}, P_\alpha \otimes \varphi\rangle = \langle T, P_\alpha \otimes \varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle U_a, \varphi\rangle = \langle T, \varphi \otimes P_\alpha\rangle.$$

Comme T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$, on voit que S_a et U_a se prolonge en des distributions sur $\mathbb{R}$.

(c) On définit les distributions sur $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{S}_X = \sum_{a=0}^{m} U_a \otimes \delta_0^{(a)} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_Y = \sum_{a=0}^{n} \delta_0^{(a)} \otimes S_a.$$

Clairement $\tilde{S}_X$ est à support dans D_X et $\tilde{S}_Y$ dans D_Y. D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^2)^*)$ de support K, on peut écrire $\varphi = \varphi_X + \varphi_Y$ où $\varphi_X \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^2) \setminus D_X)$ et $\varphi_Y \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^2) \setminus D_Y)$. Il suffit de prendre $\chi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^2) \setminus D_X)$ telle que $\chi(x) = 1$ pour x dans un voisinage de $K \cap D_Y$ ne rencontrant pas un voisinage de $K \cap D_X$ et de poser $\varphi_X = \chi\varphi$ et $\varphi_Y = (1 - \chi)\varphi$. On a $\langle \tilde{S}_X, \varphi_Y\rangle = \langle \tilde{S}_Y, \varphi_X\rangle = 0$.
On calcule alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^2)^*)$,

$$\begin{aligned}
\langle T - \tilde{S}_X - \tilde{S}_Y, \varphi\rangle &= \langle T, \varphi_X + \varphi_Y\rangle - \langle \tilde{S}_X, \varphi_X + \varphi_Y\rangle - \langle \tilde{S}_Y, \varphi_X + \varphi_Y\rangle \\
&= \langle T_{|\mathbb{R}^2\setminus D_X}, \varphi_X\rangle - \langle (\tilde{S}_X)_{|\mathbb{R}^2\setminus D_X}, \varphi_X\rangle + \langle T_{|\mathbb{R}^2\setminus D_Y}, \varphi_Y\rangle - \langle (\tilde{S}_Y)_{|\mathbb{R}^2\setminus D_Y}, \varphi_Y\rangle \\
&= \langle (T_{|\mathbb{R}^2\setminus D_X} - (\tilde{S}_X)_{|\mathbb{R}^2\setminus D_X}), \varphi_X\rangle + \langle (T_{|\mathbb{R}^2\setminus D_Y} - (\tilde{S}_Y)_{|\mathbb{R}^2\setminus D_Y}, \varphi_Y\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc $T - \tilde{S}_X - \tilde{S}_Y$ est à support dans $(0, 0)$ i.e.

$$T - \tilde{S}_X - \tilde{S}_Y = \sum_{|\alpha|\leq k} c_k \delta_{(0,0)}^{(\alpha)}.$$

On pose alors $S_X = \tilde{S}_X$ et $S_Y = T - S_X$ et on voit que S_X est à support dans D_X et S_Y à support dans D_Y.

(d) La décomposition n'est pas forcément unique : les dérivées de masse de Dirac en $(0, 0)$ peuvent être placées dans S_X ou dans S_Y ou réparties entre les deux.