Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Corrigé de l'épreuve du 14/05/2014

Exercice 1. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\varphi\left(\frac{1}{p}\right) &= \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\varphi(0) + \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\left(\varphi\left(\frac{1}{p}\right)-\varphi(0)\right)\\ &= \varphi(0)\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{p+1}\int_0^1 x^p dx + \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p^2}\int_0^1\varphi'\left(\frac{u}{p}\right)du\\ &= -\varphi(0)\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^n}{1+x}dx + \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p^2}\int_0^1\varphi'\left(\frac{u}{p}\right)du.\end{aligned}$$

Par convergence dominée, comme φ' est bornée, on obtient que

$$\begin{aligned}\langle T,\varphi\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\varphi\left(\frac{1}{p}\right) = -\varphi(0)\int_0^1\frac{1}{1+x}dx + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\int_0^1\varphi'\left(\frac{u}{p}\right)du\\ &= -\varphi(0)\log 2 + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\int_0^1\varphi'\left(\frac{u}{p}\right)du.\end{aligned}\tag{1}$$

En particulier, on a

$$|\langle T,\varphi\rangle| \le \log 2\,|\varphi(0)| + \frac{\pi^2}{6}\sup_{x\in[0,1]}|\varphi'(x)|.$$

Donc, T définit bien une distribution, la linéarité de T étant évidente. De plus, on voit que son support est contenu dans $[0,1]$ et que T est d'ordre au plus 1.
Calculons le support de T. On pose $S := \{1/p;\ p\ge 1\}$. Soit $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que son support ne rencontre pas $\overline{S} = S\cup\{0\}$. Alors, pour tout $n\ge 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\varphi\left(\frac{1}{p}\right) = 0$. Donc, le support de T est contenu dans $\overline{S}$.
Soit maintenant $\chi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive, de support contenu dans $]-1,1[$ valant 1 sur $]-1/2,1/2[$. Pour $q\ge 1$, on pose $\chi_q(x) = (-1)^q\chi(q(q+1)(x-1/q))$. On remarque que le support de χ_q est contenu dans $]1/(q+1),1/(q-1)[$ car $1 = (1/q-1/(q+1))(q(q+1) < (1/(q-1)-1/q)(q(q+1)$ (on a adopté la convention de notation $1/0=+\infty$). Donc, $\langle T,\chi_q\rangle = 1$. Ainsi S est contenu dans le support de T Comme le support de T est fermé, $\overline{S}$ est contenu dans le support de T.
Donc, le support de T est $\overline{S}$.
Montrons que T est d'ordre 1 exactement. Soit $(\chi_q)_{q\ge 1}$ comme ci-dessus. Pour $Q\ge 1$, on considère $\Psi_Q = \displaystyle\sum_{q=1}^{Q}\chi_q$. C'est une fonction dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ de support contenu dans $]1/(Q+1),2[$. De plus, comme $\chi_q\chi_{q'} = 0$ si $q\ne q'$ et que $\|\chi_q\|_\infty = 1$, on a $\|\Psi_Q\|_\infty = 1$. D'autre part, on calcule $\langle T,\Psi_Q\rangle = \displaystyle\sum_{q=1}^{Q}(-1)^q\chi_q\left(\frac{1}{q}\right) = Q\to+\infty$ quand $Q\to+\infty$ alors que $\|\Psi_Q\|_\infty = 1$. Donc, T ne peut être d'ordre 0. Comme elle est d'ordre au plus 1, elle est d'ordre exactement 1.

Exercice 2.

1. (a) Comme x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, on obtient par intégration immédiate qu'une base de solution est formée par les fonctions localement intégrable $(x^\lambda\mathbf{1}_{x>0},(-x)^\lambda\mathbf{1}_{x<0}) = (x_+^\lambda,x_-^\lambda)$ (voir question 2.). L'espace des solutions est donc de dimension 2.

   (b) Si T est supportée en 0, on sait qu'il existe $n\ge 0$ et $(a_k)_{0\le k\le n}\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}$. Si T est solution de l'équation, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k x\delta^{(k+1)} = \lambda\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}$. Or $x\delta^{(k+1)} = -(k+1)\delta^{(k)}$.

Donc, $\sum_{k=0}^{n} -(k+1)a_k\delta^{(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k\delta^{(k)}$. Ainsi on a $(\lambda+(k+1))a_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Donc, si $\lambda \notin -\mathbb{N}^*$, la seule solution de (E_λ) supportée en 0 est 0, et, si $\lambda \in -\mathbb{N}^*$, les solutions de (E_λ) supportées en 0 sont $\mathbb{C}\delta^{(-\lambda-1)}$.

(c) En utilisant la règle de Leibniz, on dérive l'équation pour obtenir

$$0 = (xT' - \lambda T)' = T' - \lambda T' + xT'' = x(T')' - (\lambda - 1)T'.$$

Donc T' est bien solution de $(E_{\lambda-1})$.

2. Soit T solution de (E_λ), $\lambda > -1$. Alors il existe $(\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{C}^2$ tels que $T_{|\mathbb{R}^*} = \alpha_+ x_+^\lambda + \alpha_- x_-^\lambda$. Comme $\lambda > -1$, la fonction $x \mapsto \alpha_+ x_+^\lambda + \alpha_- x_-^\lambda$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, disons, $\tilde{T}$. Alors la distribution $T - \tilde{T}$ est supportée en 0. De plus, comme T et $\tilde{T}$ sont solutions de (E_λ) et que (E_λ) est linéaire, $T - \tilde{T}$ est solution de (E_λ) ; elle est donc nulle car $\lambda \notin -\mathbb{N}^*$. On obtient ainsi que, si $\lambda > -1$, les solutions de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les distributions de la forme $\alpha_+ x_+^\lambda + \alpha_- x_-^\lambda$.

3. (a) Comme $\mu > -1$, $x_\pm^\mu$ sont toutes deux solutions de (E_μ). Donc par la question 1.c., $S_{\lambda,\pm} = (x_\pm^\mu)^{(n)}$ sont toutes deux solutions de $(E_{\mu-n}) = (E_\lambda)$.

(b) Un calcul direct de $(x_\pm^\mu)^{(n)}$ donne que $S_{\lambda,\pm} = (\pm 1)^n \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x_\pm^\lambda$ sur $\mathbb{R}^\pm$.

(c) Donc, si T est une solution de (E_λ), il existe $(\alpha_\pm)$ complexes tels que $T_{|\mathbb{R}^*} = (\alpha_+ S_{\lambda,+} + \alpha_- S_{\lambda,-})_{|\mathbb{R}^*}$. Donc, $T - (\alpha_+ S_{\lambda,+} + \alpha_- S_{\lambda,-})$ est une solution de (E_λ) supportée en 0 ; mais, $\lambda \notin -\mathbb{N}^*$, donc, $T = \alpha_+ S_{\lambda,+} + \alpha_- S_{\lambda,-}$. Ainsi, si $\lambda \notin -\mathbb{N}^*$, toute les solutions de (E_λ) sont de la forme $\alpha_+ S_{\lambda,+} + \alpha_- S_{\lambda,-}$.

4. (a) On calcule $(x^m T)' = mx^{m-1}T + x^m T' = x^{m-1}(xT' + mT) = 0$.

(b) On a $s_1 = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $x \cdot s_1 = 1$ et, en dérivant, $0 = (x \cdot s_1)' = x \cdot s_1' + s_1$. Ainsi s_1 est une solution de (E_{-1}).

(c) Les distributions de la forme $as_m + b\,\delta^{(m-1)}$ (où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$) sont des solutions de (E_{-m}), en utilisant les questions 1.(b) et 1.(c) et $s_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(s_1)^{(m-1)}$. Remarquons que sur R^*, on a $s_m = x^{-m}$.
D'autre part, si S est une solution de (E_{-m}), alors, par la question 3.(a), on sait que $x^m S = a$ où $a \in \mathbb{C}$. Ainsoi $x^m(S - as_m) = 0$. Donc, $S - as_m$ est supportée en $\{0\}$ et est solution de (E_{-m}). Ainsi, par la question 1.(b), on sait qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $S - as_m = b\,\delta^{(m-1)}$.
Ainsi les solutions de (E_{-m}) sont les distributions de la forme $as_m + b\,\delta^{(m-1)}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 3. La fonction $T: \ (x,y,z) \mapsto e^{i(x^2+y^2-z^2)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^3$; elle définit donc une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.
Pour $\varepsilon > 0$, on pose $T_\varepsilon : \ (x,y,z) \mapsto e^{(i-\varepsilon)(x^2+y^2)-(i+\varepsilon)z^2)}$. On voit T_ε est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et que $T_\varepsilon \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ quand $\varepsilon \to 0^+$; en effet, on a clairement, $T_\varepsilon(x,y,z) \to T(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $|T_\varepsilon(x,y,z) - T(x,y,z)| \leq 1$, donc, comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset L^1(\mathbb{R}^3)$, par convergence dominée, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, on a $\int_{\mathbb{R}^3} |T_\varphi(x) - T(x)||\varphi(x)|dx \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0$.
On a donc $\hat{T}_\varepsilon \to \hat{T}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, donc, aussi dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Calculons $\hat{T}_\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}\hat{T}_\varepsilon(\xi,\eta,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^3} T_\varepsilon(x,y,z)e^{-2i\pi(x\xi+y\eta+z\tau)}dxdydz \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{(i-\varepsilon)x^2-2i\pi x\xi}dx \int_{\mathbb{R}} e^{(i-\varepsilon)y^2-2i\pi y\eta}dy \int_{\mathbb{R}} e^{-(i+\varepsilon)z^2-2i\pi z\tau}dz.\end{aligned}$$

On calcule (on pourra consulter l'appendice 4.6 du polycopié pour plus de détails)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\varepsilon)x^2-2i\pi x\xi}dx &= e^{\frac{\pi^2}{i-\varepsilon}\xi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\varepsilon)\left(x-\frac{i\pi}{i-\varepsilon}\xi\right)^2}dx \\
&= e^{-\frac{i\pi^2}{1-i\varepsilon}\xi^2}\int_{\mathbb{R}-\frac{\pi}{1+\varepsilon i}\xi} e^{-(\varepsilon-i)x^2}dx \quad \text{par définition de l'intégrale le long d'un chemin dans } \mathbb{C} \\
&= e^{-\frac{i\pi^2}{1-i\varepsilon}\xi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon-i)x^2}dx \quad \text{par déformation de contour} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi^2}{1-i\varepsilon}\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-i}}\int_{\sqrt{\varepsilon-i}\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \quad \text{par définition de l'intégrale le long d'un chemin dans } \mathbb{C} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi^2}{1-i\varepsilon}\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-i}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \quad \text{par déformation de contour} \\
&= \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}\, e^{-i\pi^2\xi^2} + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

où $\sqrt{\varepsilon-i}$ est la détermination principale de la racine carrée i.e. $\sqrt{\varepsilon-i} = e^{-i\pi/4} + O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$.
De même, on calcule

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(i+\varepsilon)z^2-2i\pi z\tau}dz = \sqrt{\pi}\, e^{-i\pi/4}\, e^{i\pi^2\tau^2} + O(\varepsilon).$$

On obtient donc

$$\hat{T}_\varepsilon(\xi,\eta,\tau) = \pi^{3/2}e^{i\pi/4}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)} + O(\varepsilon).$$

On vérifie que dans les expressions ci-dessus que le terme $O(\varepsilon)$ est localement uniforme en (ξ,η,τ) i.e.

$$\forall R>0, \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon}\left|\sup_{|\xi|+|\tau|+|\eta|\le R}\left|\hat{T}_\varepsilon(\xi,\eta,\tau) - \pi^{3/2}e^{i\pi/4}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)}\right|\right| < +\infty.$$

Donc, on a que $\hat{T}_\varepsilon$ tend vers $(\xi,\eta,\tau)\mapsto \pi^{3/2}e^{i\pi/4}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ (par le même raisonnement que ci-dessus). On obtient ainsi que

$$\hat{T}(\xi,\eta,\tau) = \pi^{3/2}e^{i\pi/4}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)}.$$

Exercice 4. 1. Soit $R' < R$. Comme u est harmonique dans $B(0,R')$ et continue sur $\overline{B(0,R')}$, d'après les théorèmes 5.1.18 et 5.1.21 du polycopié, on sait que, pour $|x| < R'$, on a

$$u(x) = \int_{|y|=R'} P_{R'}(x,y)u(y)d\sigma(y). \tag{2}$$

D'autre part, si $|y| = R'$ et $|x| < R'$, comme $R' - |x| \le |x-y| \le R' + |x|$, on a

$$\frac{R'-|x|}{s_{d-1}R'(R'+|x|)^{d-1}} \le P_{R'}(x,y) \le \frac{R'+|x|}{s_{d-1}R'(R'-|x|)^{d-1}}.$$

Donc, si u est positive

$$\frac{R'-|x|}{s_{d-1}(R'+|x|)^{d-1}}\frac{1}{R'\,s_{d-1}}\int_{|y|=R'} u(y)d\sigma(y) \le u(x) \le \frac{R'+|x|}{s_{d-1}(R'-|x|)^{d-1}}\frac{1}{R'\,s_{d-1}}\int_{|y|=R'} u(y)d\sigma(y)$$

soit encore par la formule de la moyenne

$$\frac{R'-|x|}{(R'+|x|)^{d-1}}(R')^{d-2}u(0) \le u(x) \le \frac{R'+|x|}{(R'-|x|)^{d-1}}(R')^{d-2}u(0). \tag{3}$$

Maintenant, pour $|x| < R$, pour R' tel que $|x| < R' < R$, on a (3). En laissant tendre R' vers R, on obtient la première inégalité souhaitée.
On a calculé alors

$$\begin{aligned}
\sup_{B(0,R/2)} u \le u(0)\sup_{x\in B(0,R/2)}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}}R^{d-2} = 3\,2^{d-2}u(0) = 3^d u(0)\inf_{x\in B(0,R/2)}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}}R^{d-2} \\
\le 3^d \inf_{B(0,R/2)} u.
\end{aligned}$$

2. Soit $R' < R$. Par hypothèse, $(u_n)_n$ converge vers u uniformément sur $\overline{B(0,R')}$. Par (2) appliqué à u_n et par convergence dominée (pour n assez grand, on a $|u_n| \leq |u| + 1$ et $|u| + 1$ est bornée sur $\partial B(0,R')$ car continue), on sait que u vérifie aussi (2). Donc, u est harmonique dans $B(0,R')$ par le théorème 5.1.21 du polycopié. Ceci étant le cas pour tout $R' < R$, u est harmonique dans $B(0,R)$.

3. Pour, $n \geq m$, considérons la fonction $u_n - u_m$. C'est une fonction harmonique positive comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Soit $R' < R$. La première inégalité de la question 1. nous apprend que, pour $|x| \leq R'$, on a

$$0 \leq u_n(x) - u_m(x) \leq R^{d-2} \frac{R+R'}{(R-R')^{d-1}} (u_n(0) - u_m(0))$$

   Comme $(u_n(0))_{n\geq 1}$ est de Cauchy, on voit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur $\overline{B(0,R')}$. Donc, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\overline{B(0,R')}$ vers, disons, u. Ceci est vrai pour tout $R' < R$. Donc, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge localement uniformément sur $B(0,R)$ vers u. La question 2. nous assure alors que u est harmonique sur $B(0,R)$.